近似リーマンソルバーに基づく有限体積法を用いた土石流・土砂流の数値モデル開発，および，リーマン問題の解析解との比較による検証

砂防・地すべり技術センター ○志水 宏行
宇都宮大学農学部 酒井 佑一
砂防・地すべり技術センター 和田 眞典

1. はじめに

土石流・土砂流の数値モデルは，砂防事業における施設効果評価などに活用されている．数値モデルが目的に応じて信頼できる予測を行うためには，その予測性能を評価する体系的な方法論の確立が重要であり，本研究ではそれを将来的な目標とする．

数値モデルの予測性能評価を適切に実行するためには，まず適用されている基礎方程式(数学モデル)が実現象を適切に表現しているかを実験や観測データに基づき評価する妥当性確認(Validation)が必要である．妥当性確認に先立ち，数値モデルに実装されている数値解法の検証(Verification)が求められる[1]．ここでいう検証とは，数値解法に起因する誤差や不確かさを定量的に評価し，それらを基礎方程式由来の不確かさと分離することである．本発表では，妥当性確認の前提となる検証に焦点を当てる．

従来用いられてきた数値解法のいくつかは，安定性に課題があり，特別な数値的処理(例えば，水深がある一定閾値以下の場合に質量流束を0に設定)を施さなければ計算が発散することが知られている[2]. これは，顕著な数値誤差の原因となっている可能性がある. 一方，近年国際的に広く採用されている近似リーマンソルバーに基づく有限体積法[3]は高い安定性を有し，誤差の低減が期待される．しかしながら，同手法を日本の土石流・土砂流式に基づいた解析に適用した研究は，少なくとも学術雑誌において報告されていない.

本発表では，近似リーマンソルバーの一つであるHLL法に基づく有限体積法を実装した土石流・土砂流の数値モデルを開発し，その安定性や数値誤差の特性を明らかにするための検証(Verification)を試行的に実施した．

2. 手法

2.1. 基礎方程式

開発した数値モデルでは，一様粒径で近似される土砂から成る土石流・土砂流の土砂動態と河床変動を記述するために，宮本・伊藤(2002)[4]および鈴木ら(2013)[5]の基礎方程式を実装し，切り替えて使用できるようにした．本発表では，考察対象を前者(以下の偏微分方程式系)に絞る．

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}=\boldsymbol{S} \tag{1}$$

保存量ベクトル$\boldsymbol{U}=(h,uh,ch,z_\mathrm{b})^\mathrm{T}$，流束ベクトル$\boldsymbol{F}=(uh,u^2h+gh^2/2,c_\mathrm{t}uh,0)^\mathrm{T}$，ソース項ベクトル$\boldsymbol{S}=(E,-gh\partial z_\mathrm{b}/\partial x-\tau_\mathrm{b}/\rho_\mathrm{m},c_*E,-E)^\mathrm{T}$. 本方程式系では，水深$h$と土砂濃度$c$の各々が 0 に近づくと底面抵抗$\tau_\mathrm{b}$が無限大に発散するため，ここでは$\tau_\mathrm{b}$式での$h$と$c$に対して，人工的な下限閾値(最小水深=供給条件から得られる特徴的厚さスケール，最小土砂濃度$=10^{-2}$)を導入する．

2.2. 数値解法

有限体積法[3]に基づき式(1)を次のように離散化する．

$$\begin{cases} \text{1st step:} & \dfrac{\boldsymbol{U}_i^*-\boldsymbol{U}_i^n}{\Delta t}+\dfrac{\boldsymbol{F}_{i+1/2}^n-\boldsymbol{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x}=\boldsymbol{0} \\ \text{2nd step:} & \dfrac{\boldsymbol{U}_i^{n+1}-\boldsymbol{U}_i^*}{\Delta t}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_i^*) \end{cases} \tag{2}$$

時間刻みΔtは CFL 条件に基づき決められる．数値流束$\boldsymbol{F}_{i\pm1/2}^n$は HLL 法に基づき決定され，$\boldsymbol{U}_\mathrm{L}=\boldsymbol{U}_{i\ \mathrm{or}\ i-1}^n$および$\boldsymbol{U}_\mathrm{R}=\boldsymbol{U}_{i+1\ \mathrm{or}\ i}^n$と設定すると，

$$\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}\ \mathrm{or}\ i-\frac{1}{2}}^n=\begin{cases} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\mathrm{L}) & \left(S_\mathrm{L}=u_\mathrm{L}-q_\mathrm{L}\sqrt{gh_\mathrm{L}}\geq 0\right) \\ \boldsymbol{F}_\mathrm{HLL}(\boldsymbol{U}_\mathrm{L},\boldsymbol{U}_\mathrm{R}) & (S_\mathrm{L}<0<S_\mathrm{R}) \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\mathrm{R}) & \left(S_\mathrm{R}=u_\mathrm{R}+q_\mathrm{R}\sqrt{gh_\mathrm{R}}\leq 0\right) \end{cases} \tag{3}$$

と表される($\boldsymbol{F}_\mathrm{HLL}$は$\boldsymbol{U}_\mathrm{L}$と$\boldsymbol{U}_\mathrm{R}$の関数，$q_{\mathrm{L\ or\ R}}$は不連続波形成時の波速補正係数)．この手法により，追加の数値処理を施さずとも，常流・射流が混在する状態で各波の伝搬を安定かつ適切に評価できる．

流れの先端部の挙動は，到達範囲の決定に直結するため，大きな誤差なく適切に取り扱う必要がある．一方，浅水流方程式の数値解析では，dry 領域($h=0$)と wet 領域($h>0$)の境界は特異点となるため，流れ先端部の取り扱いには数値的難しさが伴う．これに対しここでは，安定かつシンプルな既往手法[3,6] を導入する．すなわち，dry 領域に対して，流速u，土砂の断面平均濃度c，輸送濃度c_tが 0 となる微小水深εの流体を設定する．

3. 結果・議論

3.1. リーマン問題の厳密解析解との比較による検証

非粘性清水流と同等の理想的条件(底面抵抗$\tau_\mathrm{b}=0$, 侵食堆積速度$E=0$, 地形高さ$z_\mathrm{b}=0$)でのリーマン問題(ダム・ブレイク問題)では厳密解が解析的に得られるため，その厳密解析解との比較による数値モデルの検証を試みた．初期水深h_0と初期長さx_0に$1\ \mathrm{m}$を，初期流速u_0に$0\ \mathrm{m/s}$を，初期濃度c_0に1を，流れ先端より先の領域に dry 領域($h=\varepsilon=10^{-6}\ \mathrm{m}$)を設定して数値計算を行った結果，安定に計算結果が得られることを確

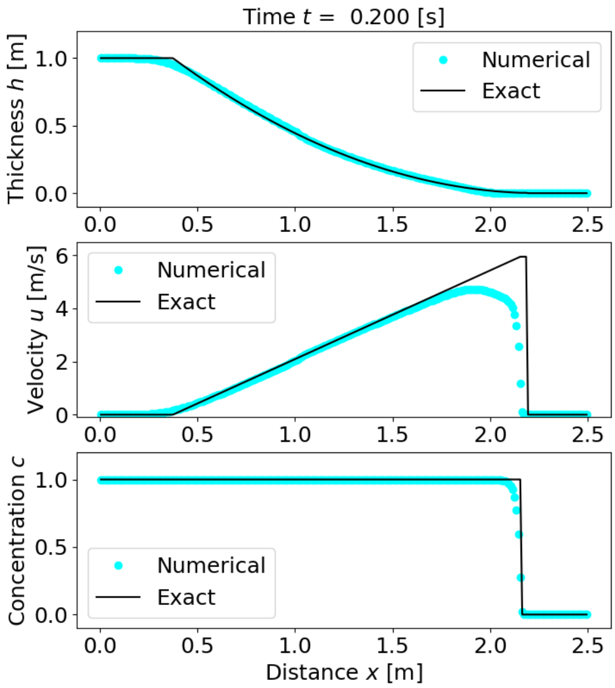

図 1　リーマン問題に対する厳密解析解(黒実線)と数値解(青丸; 空間刻み$\Delta x = 0.01$ m)の比較.

認できた(**図 1**). 流れ先端部の流速はやや鈍るが, その他の領域では水深h, 流速u, 土砂濃度cの全てにおいて数値解が厳密解析解をよく再現できていることを確認できた.

現状の検証では, 非粘性清水流が想定された解析解との定性的比較のみを実施した. 今後の検証では, 土石流・土砂流に近い条件(例：一定斜面上にて降伏応力が卓越する重力流)も含めた幅広い条件下・さらなる観点での定量評価に進めていきたい.

3. 2. 単純斜面での土石流・土砂流シミュレーション

上流側から水平方向 250 m ごとに15°, 10°, 5°, 3°, 2°, 0°の斜面からなる単純斜面地形を想定し, 地形上に移動河床が一様に 2 m 設置された条件下での土石流・土砂流のテスト解析を行った. 上流$x = 0 \sim 50$ mの領域から平衡土砂濃度の土砂と水からなる混合物を25 $\mathrm{m^2}/s$で 20 秒間供給するという数値計算を行うと, 下流側の傾斜変換点で堆積物が形成されるという結果が数値振動を伴わず安定して得られた (**図 2**).

一方, 堆積に伴い加速するという非物理的と解釈できる結果も同時に観察された(**図 2a**). この加速は, 堆積に伴って質量は損失するが運動量は損失しないという基礎方程式(式(1))の性質を直接反映したものであり, 数値解法起因の問題ではないと考えられる. 実際に, 堆積に伴う質量損失項だけでなく運動量損失項(uE)も追加した補足計算では, 上記の加速は生じない(**図 2b**). このような加速は既往数値計算結果では確認されていないようだが, その理由については現在調査中である. 今後, 既往数値解法による結果との直接比較を行い, 本問題も含めた数値解法起因の誤差・不確かさの明確化を図りたい.

4. おわりに

本数値計算結果で見られた上記の加速が, 仮に基礎方程式起因の問題である場合, 堆積モデルの再考が必要となる可能性がある. 例えば, 堆積過程が底面抵抗に伴う運動量損失による底面土砂の停止という物理過程であるなら, 堆積速度Eを底面抵抗τ_bによる排除厚さに基づいた関数として定式化するなどの検討が有効かもしれない(その場合, τ_bはuとhの両方を減少させる効果をもつことになる). 本問題は, 検証の次の段階で実施される妥当性確認の中で議論すべき課題と言える. 今後, 数値解法起因の誤差・不確かさを定量化する検証を十分に行った後, 妥当性確認の実施, そしてそれらの手法の確立を目指した検討に進めていきたい.

引用文献

1) 白鳥ら (2013) 丸善出版; **2)** 砂防学会 (2000) 山海堂; **3)** Toro (2001) Wiley; **4)** 宮本・伊藤 (2002) 砂防学会誌, 55, 2; **5)** 鈴木ら (2013) 砂防学会誌, 66, 2; **6)** Shimizu et al. (2017) Prog. Earth and Planet. Sci., 4, 8.

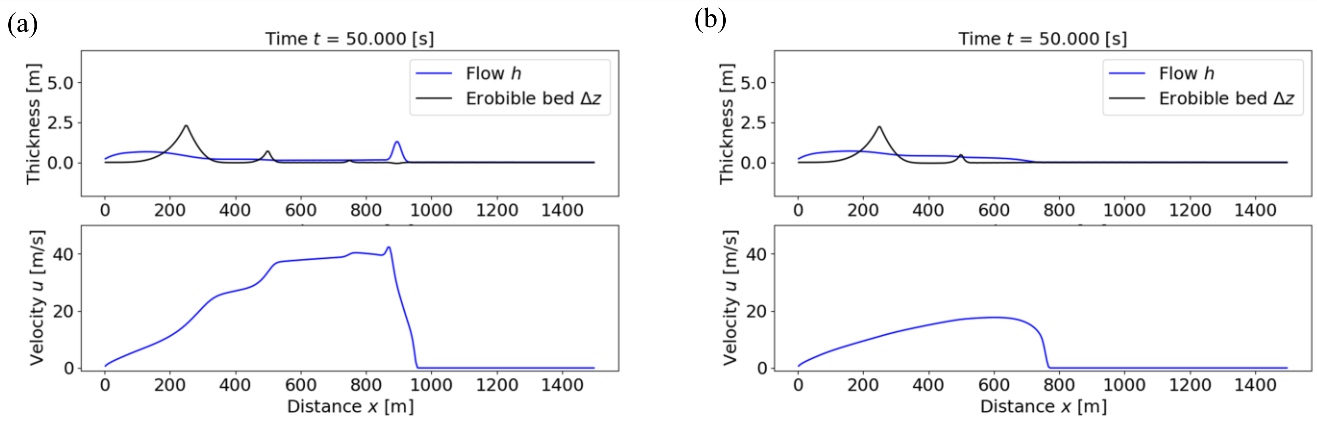

図 2　単純斜面での土石流・土砂流シミュレーション結果(空間刻み$\Delta x = 5$ m). (a)元来の基礎方程式[4]を適用した計算結果, (b)堆積に伴う運動量損失項(uE)を追加した補足計算結果.