

土石流の構成則に関する考察

筑波大学大学院

重藤 有史

筑波大学大学院生命環境科学研究科

宮本 邦明

立命館大学理工学部

伊藤 隆郭

1. はじめに

土石流の構成則に関する研究はいくつかの異なった立場から行われており、それぞれその合理性を主張している。江頭ら¹⁾は土石流を固液混相流としてとらえ、流れの力学的エネルギー収支に着目し流れによるエネルギーの散逸機構をモデル化することにより構成則を得ている。しかしながら、エネルギーの散逸機構を定常・等流の運動学的条件のもとで考察しているため、固相の圧縮性が導入されておらず、本質的に濃度変化や侵食・堆積時の応力状態を説明することが難しい。本研究では江頭らの構成則の簡単なレビューを行い、その考え方を拡張して固相の圧縮性を許す場合の構成則について考察を行う。

2. 江頭らの構成則のレビュー

江頭らは土石流の構成則を力学的エネルギー保存則
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \left(\frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right)_j = \rho g_i u_i + (u_i \sigma_{ij})_j - \phi \quad (1)$$
 をベースとして誘導した。ここに、 ρ は連続体の質量密度、 u_i は流速ベクトル、 g_i は体積力加速度ベクトル（一般的には重力加速度ベクトル）、 σ_{ij} は応力テンソル、 ϕ は力学的エネルギーの単位体積あたりの散逸速度である。式(1)は質量保存則、運動量保存則を用いて整理すると、次式を得る。

$$\phi = \sigma_{ij} u_{i,j} \quad (2)$$

応力の対称性を仮定し、テンソルの3重分解を用いて書き改めると、次式を得る。

$$\phi = -p u_{j,j} + \mathbf{T}_{ij} \mathbf{D}_{i,j} \quad (3)$$

ここに、 p 、 \mathbf{T}_{ij} 、 $\mathbf{D}_{i,j}$ 、 $\mathbf{R}_{i,j}$ は、それぞれ、

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{3} u_{k,k} \delta_{i,j} \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (7)$$

である。

江頭らは式(3)において、定常・等流の運動学的条件から $u_{i,i} = 0$ とし、

$$\phi = \mathbf{T}_{ij} \mathbf{D}_{i,j} \quad (8)$$

を基礎として構成則の考察を行っている。すなわち、エネルギーの散逸空間を粒子内部、表面、間隙に分け、

それぞれの空間に対応させて散逸速度を見積もり、式(8)に代入して構成則を次式のように求めた。

$$p = p_s + p_d + p_f = p_s + k_d \sigma e^2 c^{1/3} d^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + p_f \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{p_s}{p_s + p_d} = \left(\frac{c}{c_*} \right)^{0.2} \quad (10)$$

$$\tau = \tau_y + \tau_d + \tau_f = p_s \tan \phi_s + k_d \sigma (1 - e^2) c^{1/3} d^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho k_f \frac{(1 - c)^{5/3}}{c^{2/3}} d^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \quad (11)$$

式(9)、(11)の右辺第1項が粒子の表面、第2項が粒子内部、第3項が間隙空間それぞれに対応している。これらの項の中で最も重要なのは第2項の粒子の内部空間に対応する項であり、粒子の非弾性衝突によって生じる応力項である。単位体積あたり単位時間あたりに非弾性衝突により粒子が失うエネルギーは、

$$\phi = k_d \sigma (1 - e^2) c^{1/3} d^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (12)$$

である。式(12)を式(8)に代入することにより式(11)の右辺第2項が得られる。

3. 圧縮性の導入

流れに固相の圧縮性を持ち込む前に粒子の非弾性衝突によるエネルギー変化と応力の表現についてももう少し考えてみよう。非弾性衝突によるエネルギー散逸は衝突後の粒子速度の減少から求められる。衝突後の粒子速度の減少はマクロ的には粒子の占有空間の減少として現れるはずである。したがって、本来、式(8)あるいは式(12)で表されている非弾性衝突によるエネルギー散逸は、衝突前後の占有空間の単位時間あたりの平均体積変化量 $\bar{u}'_{j,j}$ を用いて、

$$\phi = -p \bar{u}'_{j,j} \quad (13)$$

と表されなければならない。ここで、 $\bar{u}'_{j,j}$ を見積もってみよう。これは、ひずみ速度と粒子濃度の関数で表されることが予想される。流れ場がせん断流れ場であることと $\bar{u}'_{j,j}$ の次元から、 $\bar{u}'_{j,j}$ はひずみ速度に比例すると仮定できよう。また、粒子濃度とひずみ速度が独立であれば、その関数形は両者の変数分離形で表すことができよう。すなわち、

$$u'_{i,i} = \alpha_c(c) \left| \frac{du}{dz} \right| \quad (14)$$

と表すことができよう。式(13)の p が粒子間の圧力であることに注意すると、式(12)と式(13)から、式(14)を代入して、次式を得る。

$$(p_s + p_d)\alpha_c = k_d \alpha (1 - e^2) c^{1/3} d^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (15)$$

江頭らによると、粒子間の静的な接触圧力の粒子間圧力に対する比は経験則式(10)で与えられている。粒子の非弾性衝突による圧力が式(9)右辺第2項のように得られているので式(10)は、

$$\alpha = \frac{p_s}{p_s + p_d} = 1 - \frac{e^2}{1 - e^2} \alpha_c \quad (16)$$

となる。式(16)より、粒子の材料さえ定まれば、 α は確かに粒子濃度のみの関数となる。これは、経験則として濃度の関数で表されるとしていたことの妥当性を示したものである。

経験則として α の関数形が得られていれば、式(16)より α_c の関数形が α を用いて、

$$\alpha_c = \frac{1 - e^2}{e^2} (1 - \alpha) \quad (17)$$

と表される。

ところで、流れが定常（等流）であるためには、マクロ的には粒子の占有空間は維持されなければならない。そのためには失われた占有空間は次の衝突時までには回復していなければならず、そのためには圧力は仕事をする必要がある。なされた仕事はエネルギーとして粒子の占有空間に蓄えられる。このエネルギーを E で表す。ただし、 E は単位体積あたりのそれを意味するものとする。すなわち、定常等流では単位体積あたり、

$$\frac{dE}{dt} = p \bar{u}'_{i,i} \quad (18)$$

の速さでエネルギー E は増加しているが、衝突により失われていることになる。衝突から次の衝突までの間の粒子の占有体積の変化とエネルギーのやり取りの模式図を図-1に示す。

さて、以上の考察をもとに、固相の圧縮性を考慮した場合について考察する。この粒子の占有空間に蓄えられるエネルギーの支配則は平均流を対象としても成り立つはずであるので、式(18)の右辺の $\bar{u}'_{j,j}$ を固相の平均流の速度場のそれ $u_{s,i}$ に置き換え、さらにそれを空間の連続条件を用いて

$$u_{s,i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} \right) \quad (19)$$

と書き改める。すると、式(19)を式(18)に代入して、 $c = c_*$ をエネルギーの基底とおくことにより、

$$E = p \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_*} \right) \quad (20)$$

と求まる。深さ方向の濃度分布を直線で近似して E の深さ方向の分布を調べてみよう。圧力分布 p は、

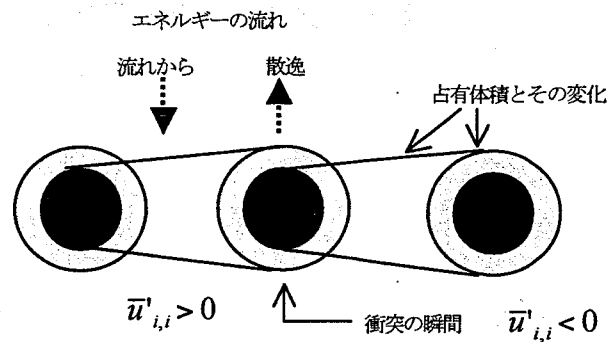


図-2 非弾性衝突によるエネルギーと空間の変化

$$p = \int_z^{h_s} c(\sigma - \rho) g \cos \theta dz \quad (21)$$

で与えられ、濃度分布は、

$$c = \frac{c_*}{h_s} (h_s - z) \quad (22)$$

で与えられるから、 E の分布は、

$$\frac{E}{(\sigma - \rho) g h_s \cos \theta} = \frac{1}{2} \frac{z}{h_s} \left(1 - \frac{z}{h_s} \right) \quad (23)$$

と求まり、河床と移動層の表面で $E = 0$ 、移動層の中央で最大となる放物線であることが分かる。断面の持つエネルギー E_T は(23)を河床から移動層表面まで積分することにより得られ、

$$E_T = \frac{1}{12} (\sigma - \rho) g h_s^2 \cos \theta \quad (24)$$

と表される。

非定常なマクロな固相の平均流場での粒子の占有空間の大きさ、あるいは粒子濃度を知るためには E の輸送方程式が必要である。そこで、 E の輸送方程式を次式で与える。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (u_{s,i} E)_{,i} = p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \right) \quad (25)$$

式(25)を深さ方向に積分し、移動層の濃度分布が3角を保つとし、さらに、右辺に流砂の連続条件を用いると、 β_E を濃度分布形の違いに対する補正係数として、

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u E_T) = -\beta_E (\sigma - \rho) g h_s^2 \frac{\partial z_b}{\partial t} \quad (26)$$

と侵食・堆積と関係をもたせることができそうである。式(18)、(26)は、式(3)を介して力学的エネルギー保存則と結びついており、両式を結ぶ新たなエネルギー保存則の構築が必要である。

4. おわりに

江頭らの構成則をもとに固相に圧縮性を導入する際の諸問題について考察を加えた。今後、圧縮性を扱う支配方程式についてさらに検討を加えていきたい。

参考文献

- 1) Egashira, S., et al.: Proc. 1st Int. Conf. on Debris-Flow Hazards Mitigation, New York: ASCE: 340-349. 1997