

新潟大学農学部生産環境科学科 ○権田 豊
 東京大学大学院農学生命科学研究科 太田彦彦
 鳥取大学地域共同研究センター 宮本邦明

1. はじめに ある場に存在する粒子群の運動を追跡することを考えよう。粒子群に属する個々の粒子が不規則な運動をしているとすると粒子群は時間とともに場に不可逆的に広がっていく。この現象を拡散という。拡散とは、粒子群に属する粒子の位置の統計的分散が時間とともに増大する現象と言いかえることが出来る。拡散現象が進行する程度をあらわす指標である拡散係数は次式で定義される。

$$K_p(t) = (1/2) \overline{dY_p'(t)^2} / dt \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 t :追跡時間、 K_p :拡散係数、 $\overline{Y_p'^2}$:粒子の位置の統計的分散である。

粒子群に属する粒子の運動の統計特性量が式(2)を満たすとき、乱れ速度の自己相関係数 $R_p(t, \eta)$ (式(3)) は追跡時間 t によらない時間差 η のみの関数となり、自己相関係数 $R_p(t, \eta)$ が有意な時間差 η の期待値である、乱れの積分時間スケール T_p (式(4)) は一定値をとる。このとき、拡散係数は式(5)のような関数形を持つことが知られている。

$$d\overline{v_p'(t)^2} / dt = d\overline{v_p'(t)v_p'(t+\eta)} / dt = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$R_p(t, \eta) = R_p(\eta) = \overline{v_p'(t)v_p'(t+\eta)} / \overline{v_p'^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$T_p = \int_0^\infty R_p(\eta) d\eta \dots\dots (4) \quad K_p = \begin{cases} \overline{v_p'^2} t & (t \ll T_p) \\ \overline{v_p'^2} T_p & (t \gg T_p) \end{cases} \dots\dots (5)$$

ただし $\overline{v_p'(t)^2}$:粒子の乱れ速度の統計的分散、 $\overline{v_p'(t)v_p'(t+\eta)}$:乱れ速度の自己相関関数である。

以上より、粒子群の運動を拡散係数一定値の拡散現象として取り扱うためには、粒子群の運動が式(2)を満たし、また粒子群を追跡する時間が粒子の乱れの積分時間スケール T_p に比べ十分に大きいことが必要条件となることがわかる。

従来、浮遊砂の運動は、拡散現象として取り扱われ、その拡散係数は、場に依存した一定値とされてきた。しかし浮遊砂の運動は、乱れによって河床から流れに取り込まれ、再び河床に到達するまでの運動継続時間が有限なものであり、さらに運動を開始した浮遊砂群が式(2)を満たすまでには、ある程度の時間を要すると考えられる。したがって、浮遊砂粒子の乱れの積分時間スケールおよび式(2)が満たされるまでの時間の大きさを評価し、浮遊砂の運動継続時間と比較することは、浮遊砂を拡散係数一定

値の拡散現象として取り扱う上で不可欠である。そこで本研究では、単純な数値解析により、ある瞬間に運動を開始した、沈降性を持った粒子群の運動の統計的特性の時間変化を追跡し、式(2)が満たされるまでの時間、拡散係数が一定値と見なせるまでの時間と粒子の乱れの積分時間スケールとを比較する。

2. 解析モデル 乱れ場における粒子の運動を数値解析する場合、個々の粒子に作用する流体の速度変動をモデル化することが多い。その場合一定の速度が継続する、乱れの作用時間 Δt を設定し、作用時間ごとに流体の速度 $v_f(t)$ を与える。場の乱流構造を考慮して $v_f(t)$ に時空間的な相関を持たせる場合があるが、本研究では議論を単純化するため、個々の粒子が受ける乱れは独立で、時間的な相関はないとし、式(6)のような単純なモデルで与えた。これに対応し、一般的に用いられる、乱流中を運動する粒子の運動方程式から、流体の加速にともなう生じる圧力項、揚力項、Basset 項などの乱流構造と密接な関係をもつ項を省略した式(7)で粒子の運動を追跡した。

$$v_p = \sigma_v \gamma(\Delta t) \dots\dots\dots (6)$$

$$(\rho_p + C_M \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_p}{dt} = (\rho_p - \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} g \dots\dots\dots (7)$$

$$-\frac{1}{2} \rho_f C_D \frac{\pi d^2}{4} (v_p - v_f) |v_p - v_f|$$

$$C_D = 24 / \text{Re}_p + 0.4 \dots\dots (8) \quad \text{Re}_p \equiv |v_p - v_f| d / \nu \dots\dots (9)$$

ただし、 σ_v :流体の乱れ強度、 $\gamma(\Delta t)$:継続時間 Δt 平均0分散1の生起確率一様な矩形乱数波を生成する関数、 ρ_p, ρ_f :粒子および流体の密度、 d :粒子の粒径、 g :重力加速度、 C_M :仮想質量係数(=0.5)、 Re_p :粒子レイノルズ数である。

3. 計算条件 数値計算は、密度 $\rho_p = 2.65$ の均一な球形粒子 40000 個を対象とし、時刻 $t=0$ に、原点 $Y_p=0$ から速度 $v_p=0$ で全粒子の運動を開始させた。粒径 d 、無次元化された乱れ速度 σ_v / v_{p0} 、乱れの作用時間 Δt を計算条件のパラメータとし、粒径 $d=0.1, 0.5, 1.0, 5.0, 10.0$ [mm] の 5 ケース、 $\sigma_v / v_{p0}=0.803, 1.07, 1.61, 3.21, 8.03$ の 5 ケース、乱れの作用時間 $\Delta t=0.1, 0.01, 0.001$ [sec] の 3 ケースを組み合わせ合計 75 ケース行った。式(7)の運動方程式を数値的に解くにあたっては、Runge-Kutta 法を用いた。全ケースにおいて、計算の刻み時間を乱れの作用時間 Δt の 1/10 および 1/100 にとって計算を行い、計

算の刻み時間が結果に有意な影響を及ぼさないことを確認した。粒子が受ける乱れを生成する際に必要な式(6)の関数 $\gamma(\Delta t)$ には、あらかじめ発生させ、統計的性質を吟味した一様乱数系列を用い、全ケースで粒子が受ける乱れの統計的性質が相似になるように配慮した。

4. 結果と考察 図-1に平均沈降速度, 乱れ速度の分散, 拡散係数の時間変化の一例を示す。横軸は乱れの作用時間で無次元化した追跡時間 $t/\Delta t$, 縦軸は十分に長い時間が経過し, 粒子群の運動の統計的性質が定常に達したときのそれぞれの値で無次元化した, 平均沈降速度 $\bar{v}_p/\bar{v}_{pTerm}$, 乱れ速度の分散 $\overline{v_p^2}/\overline{v_{pTerm}^2}$, 拡散係数 K_p/K_{pTerm} である。 $\bar{v}_p/\bar{v}_{pTerm}$, $\overline{v_p^2}/\overline{v_{pTerm}^2}$, K_p/K_{pTerm} の値はいずれも, 時間とともに1に漸近するが, 1に達するまでに要する時間(以後それぞれ $t_b(\bar{v}_p)$, $t_b(\overline{v_p^2})$, $t_b(K_p)$ とする)は, 計算条件により異なることがわかる。図-2に乱れの作用時間 Δt で無次元化した $t_b(\bar{v}_p)$, $t_b(\overline{v_p^2})$, $t_b(K_p)$ と粒子の乱れの積分時間スケール T_p の関係を示す。 $t_b(\overline{v_p^2})$ は $t_b(\bar{v}_p)$, $t_b(K_p)$ と比較して小さな値を取っているが, およそ $t_b(\bar{v}_p) \approx t_b(\overline{v_p^2}) \approx t_b(K_p) \approx T_p$ という関係があることがわかる。これは, 粒子群を追跡する時間 t が, 粒子の乱れの積分時間スケール T_p 比べ十分に大きくなれば, 粒子群が初期に持っていた運動の統計的性質によらず, 粒子群の運動を拡散係数一定の拡散現象として取り扱うことが可能であることを示している。さて, 図-2の横軸のパラメータ $2T_p/\Delta t$ について考えてみよう, 本研究では, 粒子が運動中に受ける乱れを, 各作用時間ごとにランダムに与えており, 粒子が受ける流体の乱れの積分時間スケール T_f は $\Delta t/2$ である。したがって横軸の無次元量 $2T_p/\Delta t$ は, T_p/T_f という意味を持つことになる。図-2のプロットは $2T_p/\Delta t$ 1から数100の範囲に分布している。これは条件により T_p は T_f と比べて全く異なるオーダーの値となることを示している。このことは, 拡散係数が式(5)のような追跡時間の関数であることを考慮すると, 現象を観測するスケールの取り方によっては, 流体の乱れに十分に応答する粒子の運動と沈降性粒子の運動とが全く異なった現象として観測される(例えば, 前者は拡散係数一定値の拡散現象であるが, 後者は前者と比べると殆ど拡散しないように観測される)可能性があることを示している。粒子群の運動を拡散現象として取り扱う場合, 特に浮遊砂の運動のように境界に挟まれた有限な空間での運動を取り扱う場合, 現象の時空間スケールに注意を払う必要があると

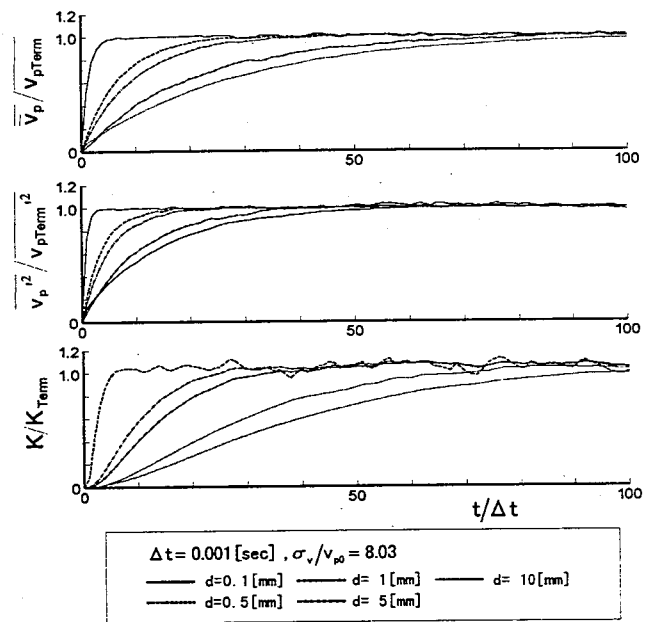


図-1 粒子運動の統計量の時間変化

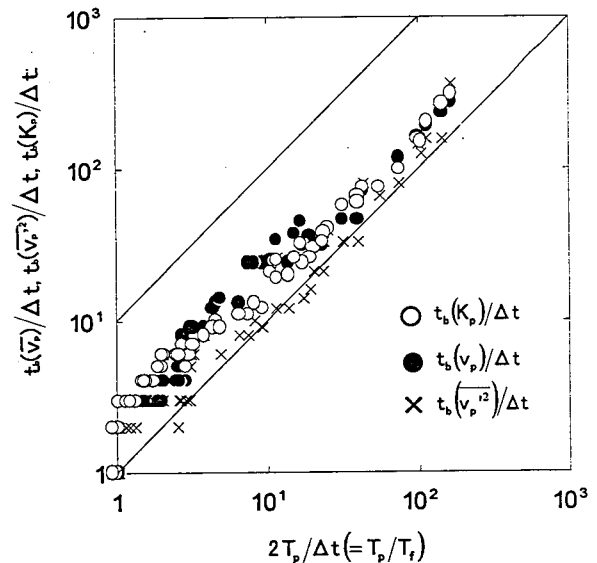


図-2 粒子運動の統計的性質が定常に達するまでの時間と乱れの積分時間スケールの関係

いえよう。

5. おわりに 沈降性粒子群の運動は, 追跡時間が粒子の乱れの積分時間スケールと比べ十分に大きい場合, 初期条件によらず拡散係数一定値の拡散現象として取り扱うことができること, ただし粒子の乱れの積分時間スケールは, 粒子に作用する流体の乱れの積分時間スケールと比べ異なったオーダーの値を取る可能性があり, 現象を観測する時間スケールには, 注意が必要であることがわかった。今後は, 流砂の運動継続時間と乱れの積分時間スケールとの関係から浮遊砂という現象について考えたい。

参考文献: 権田 豊(1998)単純な乱れ場における沈降性粒子の拡散過程に関する基礎的研究, 東京大学学位論文