P-036

CIP法を用いた常流から射流に遷移する流れの1次元解析

○ 筑波大学生物資源学類　重藤有史
筑波大学大学院生命環境科学研究科　宮本邦明

1. 緒言

山地河川における常流と射流の混在する流れの解析ではオイラー的に流れ場を扱うMacCormak法が用いられているが，支配断面近傍における計算精度が問題となっている[1]．本研究では流れ場をラグランジュ的に扱うCIP法を用いることで支配断面近傍における計算精度を向上できる可能性があると考えた．そこでCIP法を1次元で常流から射流に遷移する不等流に適用し，MacCormak法による解析結果との比較を試みた．

2. 数値計算の概要

1) 流れの支配方程式

支配方程式は質量保存則と運動方程式からなる，1次元非定常流の式である．

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(\frac{\partial z_b}{\partial x} + I_e) \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここでt:時間，x:流下方向の座標，u:平均流速，z_b:河床位，g:重力加速度，h:水深，$I_e = \frac{n^2u^2}{R^{4/3}}$：エネルギー勾配，$n$:マニングの粗度係数，$R$:径深である．

2) CIP法を用いた計算

CIP法はT.Yabe and T.Aoki[2]によって開発された移流方程式を風上差分で計算する手法である．格子間の物理量を3次多項式で補間し，その連続条件に格子上の物理量fと1階の空間微分値gを用いることに特徴がある．差分式は以下の通りである．ただしu:伝播速度，Δx:空間の格子間隔，Δt:時間の格子間隔，$\xi = -u_i\Delta t$，f^*:移流後の物理量であり，$u \geq 0$とした．

$$f_i^* = a_i\xi^3 + b_i\xi^2 + g_i^n\xi + f_i^n \tag{2}$$

$$a_i = \frac{g_i^n + g_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{2(f_i^n - f_{i-1}^n)}{(\Delta x)^3}, \quad b_i = \frac{2g_i^n + g_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{3(f_i^n - f_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}$$

そこで式(1)において係数行列を対角化し，変形すると次の移流方程式が得られる．

$$\frac{d}{dt}(\Gamma \pm \frac{1}{2}u) = \pm\frac{1}{2}g(\frac{\partial z_b}{\partial x} + I_e) \tag{3}$$

ここで$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm \Gamma)\frac{\partial}{\partial x}$，$\Gamma = \sqrt{gh}$である．

式(3)は2つの物理量$\Gamma \pm \frac{1}{2}$がそれぞれ速度$u \pm \Gamma$で特性線上を移流し，支配断面では速度の符号が変化することを示している．風上差分であるCIP法は特性線の向きに応じて計算を行うので支配断面での速度変化を計算に反映することができる.一方でMacCormak法は運動量と質量の収支から流れを決めるために物理現象に即した計算であるかは明確ではない．それゆえCIP法を使うことで精度が向上するのではないかと考えられる．

CIP法は移流のみを解くスキームであるから，今回は式(1)の非斉次項を0とおいて解析を行った．境界条件として上流では流量を下流では水深を与えた．

3) MacCormak 法を用いた計算

MacCormak 法は陽的・2 段階差分法である．予測子段階で前進 (後退) 差分を行い粗い近似をし，修正子段階で後退 (前進) 差分により補正を行う．差分式は式 (1) を保存形式に変形した後，非斉次項を含まずに以下のように与えた [3]．

$$予測子 : \overline{U_i} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(E_{i+1}^n - E_i^n), \quad 修正子 : U_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_i^n + \overline{U_i} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{E_i} - \overline{E_{i-1}})\right) \quad (4)$$

$$U = \begin{pmatrix} Bh \\ Q \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{1}{2}gBh^2 + \frac{Q^2}{Bh} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -gBh(\frac{\partial z_b}{\partial x} + I_e) \end{pmatrix},$$ B:水路幅，Q:流量である．

3. 結果と考察

図 1 の左に CIP 法と MacCormak 法の解析結果を示した．図中で流れは左から右であり，常流から射流へ遷移している．CIP 法による結果は滑らかに遷移しているのに対し，MacCormak 法による結果は支配断面の直上で堰上げが生じている．ただし CIP 法による結果が滑らかに遷移した理由として時間に対して 1 次精度の差分であるために数値拡散が生じている可能性はある．

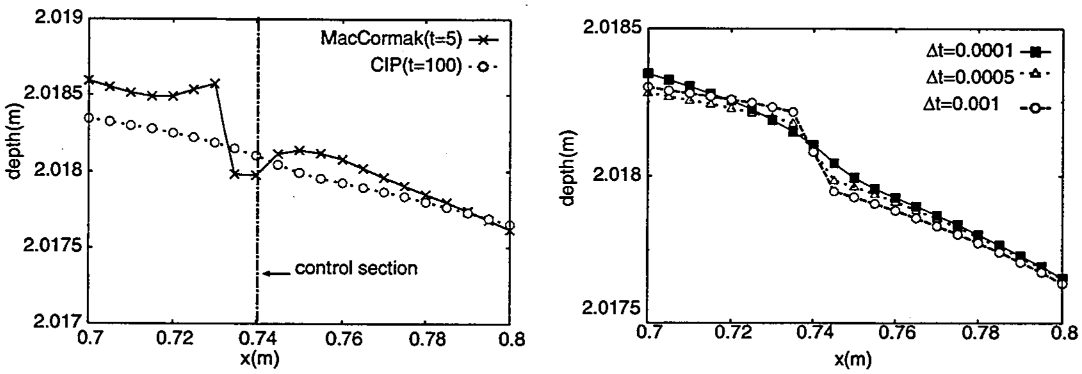

図 1: 左 : 支配断面近傍における移流段階の解析結果 ($\Delta x = 0.005$,Δt=0.0005), 右 : Δt が異なる 100 秒後の支配断面近傍の流れ (Δx=0.005)

また式 (2) では $\xi = -u_i \Delta t$ と置いたため，空間には 3 次精度であっても時間には 1 次精度でしかない．速度は時間変化をするので Δt が大きいと精度の低下を招く．そこで Δt を小さくして解析を行ったところ，図 1 の右のような結果が得られた．これから時間の格子間隔を小さくしていくと遷移はより滑らかになることがわかる．

今回の解析結果から MacCormak 法の解は支配断面直上で水理量が過小評価され堰上げが生じ，CIP 法による解ではそのような傾向は見られないとの定性的な理解が得られた．しかし計算には非斉次項を含んでいないために定常解が存在しないので，任意の時間においても同様の結果が得られるかは不明である．今後は時間の精度は 1 次として，先づ非斉次項を含んだ計算を進めていきたい．

4. 参考文献

1) 日下部ら，マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究，水工学論文集，vol.40, pp.977-982, 1996

2) T.Yabe and T.Aoki, A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynominal interpolation I. One-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, vol.66, pp.219-232, 1991

3) 砂防学会編，山地河川における河床変動の数値計算法，山海堂，2000