

浮遊砂の拡散過程

○東京大学大学院

東京大学農学部

鳥取大学地域共同研究センター

権田 豊

太田猛彦

宮本邦明

1. はじめに 従来、浮遊砂の運動は直感的に乱流拡散の一種としてとらえられ、流れを基準に浮遊砂の運動は取り扱われてきた。たとえば、Rouse は、式(1)の拡散モデルを提案し、左辺第1項が場の濃度勾配によって生じる拡散フラックス、左辺第2項は、浮遊砂が平均的に一定速度で沈降することによるフラックスで、式(1)は両者が釣り合うことを示していると説明している。また浮遊砂の拡散は乱流拡散によるとされることから、モデルのパラメータ ϵ_s は、「浮遊砂の拡散係数」と呼ばれ、式(2)のように流れの運動量拡散係数 ϵ_m と結びつけて考えられてきた。著者ら¹⁾が急勾配粗面水路をもちい浮遊砂の拡散にとって理想的と思われる条件で実験を行い、結果を拡散モデルで評価したところ、モデルに矛盾が生じることが示された。それを受け、平成5年度の研究発表会²⁾において、浮遊砂の拡散モデルと浮遊砂の拡散方程式とを比較し、浮遊砂の拡散モデルの持つ物理的な意味を検討したが、検討に不十分なところがあったため、あらためて検討を行い、さらに浮遊砂の運動の取り扱いについて吟味を行った。単純化のため、浮遊砂は平均的に一定速度で沈降し乱流拡散するものとする。

$$\epsilon_s \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C = 0 \text{ ----- (1)} \quad \epsilon_s = \beta \epsilon_m \text{ ----- (2)}$$

ただし、 ϵ_s : 「浮遊砂の拡散係数」と呼ばれるパラメータ、 w_0 : 浮遊砂の平均沈降速度、 C : 浮遊砂濃度、 β : 比例定数 (≈ 1)、 ϵ_m : 流れの運動量拡散係数である。

2. 浮遊砂の拡散方程式と浮遊砂の拡散モデルの比較

水平方向のみに一様な流速 U をもつ2次元の流れを考え、図-1のように座標系を導入する。ただし重力の作用方向は流れに垂直で、 y 軸に平行であるとする。また水面($y=h$)と河床($y=0$)の存在が浮遊砂の運動に影響を与えることはないとする。浮遊砂の拡散係数を K 、浮遊砂の平均運動速度 \bar{u}_s を $(U, -w_0)$ とすれば、浮遊砂の拡散方程式は式(3)となる。

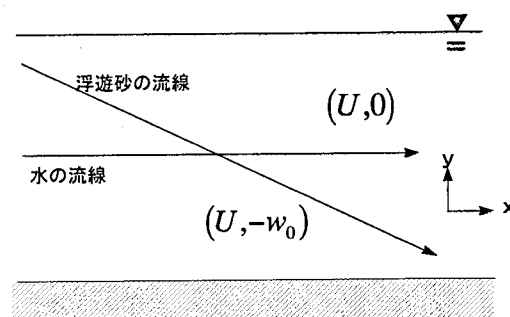


図-1 流れ場と座標系

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} - w_0 \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial C}{\partial y} \right) + S \text{ (3)}$$

ただし、 s : 浮遊砂の湧き出し、 D/Dt : 浮遊砂の平均的な運動の軌跡に沿った物質微分である。

この方程式は平均速度 $(U, -w_0)$ を持った任意の微小要素について成立する。図-1に示すような、水面と河床を持った2次元流れでは、そのような微小要素の軌跡は高々水面に始まり河床に終わる有限なものとなる。よって、流れの任意の浮遊砂塊に注目した場合、十分長い時間が経過すれば、浮遊砂塊の重心は、水面と河床に挟まれた区間を通過し、浮遊砂塊に含まれるすべての浮遊砂は、この区間には存在しないようになる。したがって、浮遊砂の湧き出し S を式(4)に示すような座標 y のみの関数として、時間・空間にわたり連続的に供給し、供給開始から十分に長い時間が経過した場合のみ、系がほぼ定常、つまり式(5)が近似的に満たされるようになる。

$$S(t, x, y) = S(y), \int_0^h S(y) dy = 0 \text{ ----- (4)} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \text{ ----- (5)}$$

さて系がほぼ定常のとき、式(3)は式(6)と書き直される。拡散モデルを y について微分すると式(7)となる。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial C}{\partial y} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial y} + S = 0 \text{ ----- (6)} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_s \frac{\partial C}{\partial y} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \text{ ----- (7)}$$

式(6)と式(7)から、浮遊砂の拡散モデルには湧き出し S に相当する項が陽に存在しないことがわかる。従来説明

されているように、浮遊砂の拡散モデルのパラメータ ϵ_s が浮遊砂の拡散係数 K と同義であるとすれば、浮遊砂の拡散モデルは湧き出し $S \equiv 0$ としていることになり、系が定常とみなせるとき浮遊砂濃度は、 $C \equiv 0$ となる。拡散モデルでは現実の濃度分布を説明できないことになる。つまり、浮遊砂の拡散方程式と、拡散モデルは本質的に異なったものであり、浮遊砂の拡散モデルのパラメータ ϵ_s には従来期待されているような浮遊砂の拡散という意味はないといえる。式(6)、式(7)の差をとると式(8)となることから、浮遊砂の拡散モデルのパラメータ ϵ_s は、式(9)のような浮遊砂の拡散係数 K と浮遊砂の湧き出し S の関数となっていることがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left((\epsilon_s - K) \frac{\partial C}{\partial y} \right) = S \dots (8) \quad \epsilon_s = f(K, S) \dots (9)$$

浮遊砂の湧き出し S は、河床から流れへの浮遊砂の供給を表すものであり、河床の状況に応じてその値が変化する。その S の変化に応じ、浮遊砂の拡散係数 K の値とは独立に、パラメータ ϵ_s が変化するようになる。

3. 浮遊砂の取り扱いについて 式(3)の左辺第3項を右辺に移行すると、次式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial C}{\partial y} \right) + w_0 \frac{\partial C}{\partial y} + S \dots (10)$$

この式の左辺は形式上、流れに沿った物質微分となっており、この式は流れから見た浮遊砂の保存則を表しているように見える。さて、流れを基準として浮遊砂の運動を評価することについて考えてみる。まず拡散について考えてみよう。詳細についてはあえて省略するが、粒子の拡散係数は、同一の母集団に属する個々の粒子の運動を十分長い時間追跡し、母集団の重心（統計平均値）からの相対変位の統計的分散の時間変化を評価することで求められる。式(10)の K は、図-3 に示すように流れの流線を斜めに横切って運動する浮遊砂塊に含まれる浮遊砂粒子を十分長い時間追跡し、求めた統計量である。図-3 からわかるように、流れ、つまり適当な流体塊から浮遊砂を観測した場合、時間とともに履歴の異なった浮遊砂粒子が観測される。いいかえれば、流体塊のからは、浮遊砂粒子の運動を十分に長い時間継続して観測することはできない。したがって、流れを基準とした観測からは、浮遊砂の拡散係数 K を評価することはできず、また、それ以前の問題として、流体を基準とし拡散を定義することは出来ない。つぎに湧き出しについて考えてみよう。式(10)より、流れを基準とした場合、浮遊砂の y 方向の移流 $w_0 \partial C / \partial y$ が湧き出しという意味をもち、この項と浮遊砂の湧き出し S の和が浮遊砂の見かけの湧き出しとして観察されることがわかる。しかし、流体を基準とした浮遊砂の見かけの拡散というものをなんらかの形で定義しない限り、見かけの湧き出しすら評価することは出来ず、ましてや浮遊砂の見かけの湧き出しから、浮遊砂の真の湧き出しを分離することはできない。つまり流体を基準とした観測からは、 K も S も評価できないといえる。したがって、浮遊砂の拡散係数 K 、浮遊砂の湧き出し S を評価するためには、Lagrange 的に浮遊砂を追跡しなければならないといえる。

4. おわりに 浮遊砂の拡散モデルと浮遊砂の拡散方程式を比較した結果、1) 両者は本質的に異なったものであり、拡散モデルのパラメータ ϵ_s には浮遊砂の拡散係数という意味はない。2) 浮遊砂の拡散係数、湧き出しを評価するためには、浮遊砂の運動を Lagrange 的に追跡しなければならない。ということがわかった。

参考文献

- 1) 権田・太田・宮本：粗度の大きな粗面固定床上の浮遊砂，砂防学会誌（新砂防），Vol42, No.2, pp3-9, 1993
- 2) 権田・太田・宮本：浮遊砂の機構に関する考察，平成5年度砂防学会研究発表会要旨集，pp125-128, 1993

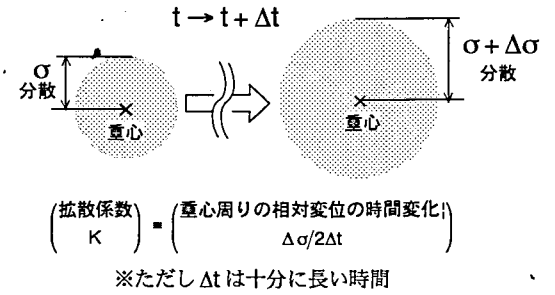


図-2 拡散係数

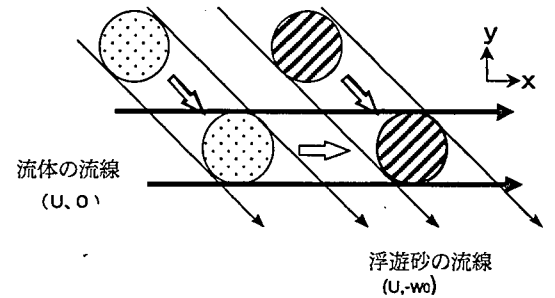


図-3 流体から見た浮遊砂