

60 土壌水分特性を考慮した浸透流数値計算精度の検討

国土防災技術(株) ○大野亮一

東京大学農学部 鈴木雅一 白木克繁 太田猛彦

1. はじめに

斜面崩壊は降雨を起因とする場合が多く、これまで雨水の浸透を考慮に入れた崩壊の研究が多くなされてきた。しかし、飽和不飽和浸透計算モデルによる数値計算については未だ多くの課題が存在し、飽和浸透のみを扱う場合や、与えられている水分特性曲線に対して適切ではない手法やメッシュ間隔で計算している場合も見受けられる。崩壊がいつ発生するのかという時間予測を行いたい場合、土塊内の間隙水圧分布を時系列で把握する必要があり、また、斜面からの降雨流出を予測する場合にも不飽和浸透の適切な計算法の確立が必要である。特に流量を計算する場合には水収支の釣り合った精度の高い計算が要求される。本研究では、その強い非線形性のために多くの課題が残されている飽和不飽和浸透計算について、一次元鉛直浸透を扱いながら、Celiaら(1990)が提示した修正 Picard 法と通常の差分法とを比較しその特徴を調べ、水分特性パラメータとメッシュサイズ dz 、時間間隔 dt との関係の評価した。

2. Picard 法および修正 Picard 法について

浸透の基礎式である Richards 式は一次元では以下のようにあらわされる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ K \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right\} - C \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

(1)式左辺を空間について中心差分、時間については後退差分で離散化すると

$$\frac{1}{dz^2} \left[K_{i+1/2}^{n+1,m} (\psi_{i+1}^{n+1,m} - \psi_i^{n+1,m}) - K_{i-1/2}^{n+1,m} (\psi_i^{n+1,m} - \psi_{i-1}^{n+1,m}) \right] + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{dz} - \frac{1}{dt} C_i^{n+1,m} (\psi_i^{n+1,m} - \psi_i^n) = 0 \quad \dots (2)$$

ここで下付きの添字 i は節点番号を、肩付きの添字 n, m は n 番目の time step における m 回目の反復計算という意味である。ここで予測したい反復 $m+1$ 回目の ψ と既知の m 回目の ψ の差を δ とおき、 $\delta_i^m = \psi_i^{n+1,m+1} - \psi_i^{n+1,m}$ として定義する。(2)式の各 $\psi^{n+1,m}$ に δ を加えて移項し整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{C_i^{n+1,m}}{dt} \delta_i^m - \frac{1}{dz^2} \left[K_{i+1/2}^{n+1,m} (\delta_{i+1}^m - \delta_i^m) - K_{i-1/2}^{n+1,m} (\delta_i^m - \delta_{i-1}^m) \right] \\ & = \frac{1}{dz^2} \left[K_{i+1/2}^{n+1,m} (\psi_{i+1}^{n+1,m} - \psi_i^{n+1,m}) - K_{i-1/2}^{n+1,m} (\psi_i^{n+1,m} - \psi_{i-1}^{n+1,m}) \right] + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{dz} - \frac{1}{dt} C_i^{n+1,m} (\psi_i^{n+1,m} - \psi_i^n) \end{aligned} \quad \dots (3)$$

これが、Picard 法による離散化である。左辺の δ を未知数としてマトリックスを組む。反復計算の収束判定は $\delta \rightarrow 0$ 、(3)式右辺 $\rightarrow 0$ より行う。(3)式は左辺の C への乗数が δ という ψ の差であるため、 C の誤差の影響が小さくなる長所を持つ。また、反復を繰り返すなかで、 m 回目の反復計算による ψ を既知項として(3)式に代入するというアルゴリズムが特徴的である。

Celiaら(1990)が提示した修正 Picard 法は、上式の2重線部分 $C_i^{n+1,m} (\psi_i^{n+1,m} - \psi_i^n)$ を $(\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n)$ と書き直したもので水収支誤差を消すための改良が施されている。これにより修正 Picard 法は0%の水収支誤差のパフォーマンスを示す。

3章以下の数値計算は、この修正 Picard 法と通常の差分法(空間、時間ともに中心差分)の2つの方法を用いておこなった。

3. 2セルモデルによる精度判定

3.1 計算モデルについて

一般には鉛直浸透計算は複数個のセルを並べて計算を行うが、セル1組において生じているであろう誤差を正確に把握することを目的とし、ここでは2セルでの計算を行った。上下に2つのセルを並べ、2節

点間での水移動を計算する。また水分特性曲線としては以下に示す谷式を採用した。

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(\frac{\psi}{\psi_0} + 1 \right) \exp \left(- \frac{\psi}{\psi_0} \right), \quad K = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^p$$

以下のすべての計算において $K_s = 0.001 \text{ cm/sec}$, $\theta_s = 0.65$, $\theta_r = 0.45$ の各パラメータ値は固定されている。ここでは dt , dz , $\psi_0 (= p_0)$ 相互の関係を評価することにあるが、まず最初に、時間ステップ dt , および水収支誤差の影響がキャンセルされる定常浸透時の計算を行った。

(a) dz と p_0 の関係 (定常浸透時)

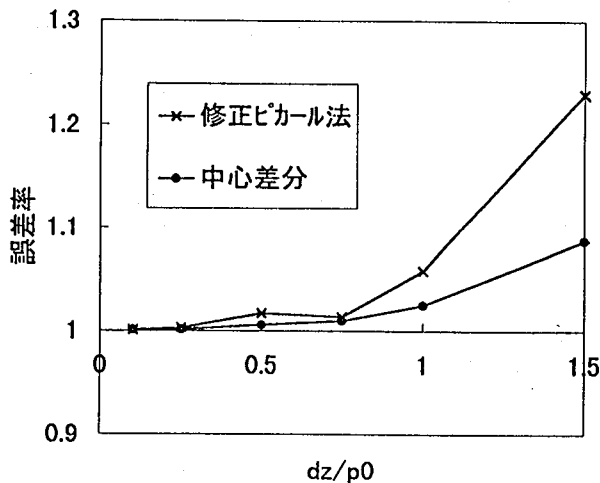
下端を $\psi = 0$ に固定し上端から一定流量 q を継続させる定常浸透時の ψ 鉛直プロファイルについては解析解が容易に得られる。その方法は日野ら⁽¹⁾にならい一定の流量 $\hat{q} = q / K_s$ (ここでは $\hat{q} = 0.01$ とした) が流れる土体内の解析解 ψ を、数値積分より得て、修正 Picard 法と通常差分法による計算値との比較をおこなった。

(b) dz と dt の関係 (非定常浸透時)

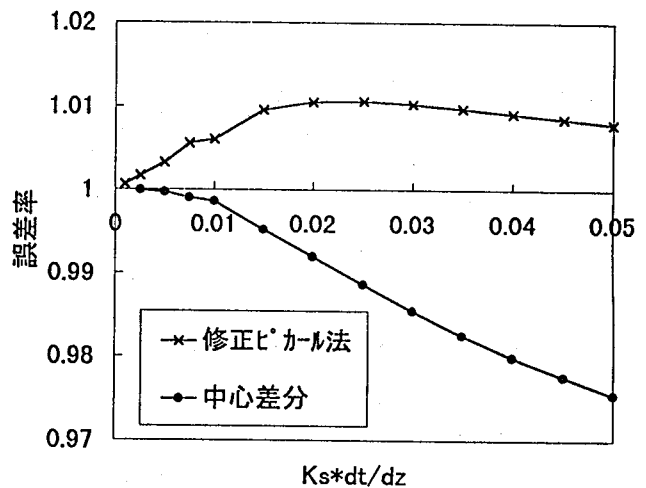
次に dz と dt の関係を調べるために、2つのセルにそれぞれ等しい初期 ψ 値を与え重力下降をさせた。このとき上端下端はともにフラックス 0 とした。底面での ψ 値を経時的に追いかけて、各 time step で計算値と真値との差を調べ、差の値がもっとも大きくなる時の比率を図に示した。なお真値としては $dz = 1.0 \text{ cm}$, $dt = 0.5 \text{ sec}$ の条件で通常差分法を用いた計算結果を用いた。

3.2 計算結果

Fig(a)では、いずれの手法でも $-dz / p_0 = 0.75 - 1.0$ を境として誤差が急激に大きくなっている。メッシュ間隔 dz は p_0 の $3/4$ 以下にすれば ψ は 1% 程度の誤差ですむ。また修正 Picard 法は通常の差分法よりも誤差が大きな値を示している。Fig(b)では、 dt が大きくなると、修正 Picard 法では 1% 程度の誤差で頭打ちとなるが、通常の差分法では誤差が単調増加していることがわかる。修正 Picard 法では dt の許容範囲が大きいという特徴は先に述べたアルゴリズムに負うところが大きいと思われる。また、図には示さないが、通常の差分法で飽和域で解が振動している場合でも、修正 Picard 法では解の振動はみられなかった。



Fig(a). dz と p_0 の関係 (定常浸透時)



Fig(b). dz と dt の関係 (非定常浸透時)

文献 (1) Celia M. A., Bouloutas E. T., and Zarba R. L. : A General Mass-Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation, *Water Resour. Res.*, 26, 1990,

(2) 日野幹雄, 太田猛彦, 砂田憲吾, 渡辺邦夫 : 洪水の数値予報 pp.217-226, 森北出版 1989.