

斜め噴流の衝突による境界層について

○三重大学 林 拙郎 近藤観徳 久保田 奇

1. はじめに

砂防ダム下流部の洗掘面内へ流入する流れは、洗掘面（水クッション）の側からみれば、斜め噴流による洗掘底面に衝突する流れといえる（図-1）。洗掘底面に衝突した流れはそこに沿って境界層を形成し、この境界層により底面に剪断応力を生ずる。底面に生ずる境界層の外側は自由噴流の領域と考えることができ、ある点から下流へは自由噴流としての流速の減衰が考えられる。ここでは、噴流の中心付近のみに注目し、底面の曲率を考えない場合の境界層について主に解析を行った。

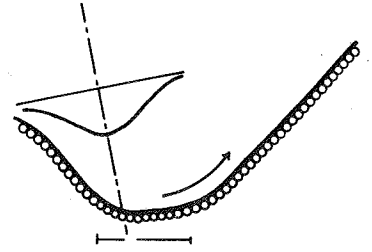


図-1 洗掘底面部の流れ

2. 境界層外縁の速度分布

図-2のような流れを考え、底面に近い領域Cにおける流れをポテンシャル流れと仮定する。こうすれば、この領域の流れは速度ポテンシャルを ϕ として、 $\nabla^2 \phi = 0$ (1) が成立する。ここで、x方向の速度 u は $u = \partial\phi / \partial x$ 、z方向の速度は $v = \partial\phi / \partial z$ として与えられる。境界条件としては、一般に $a \gg \delta$ であることに着目して、

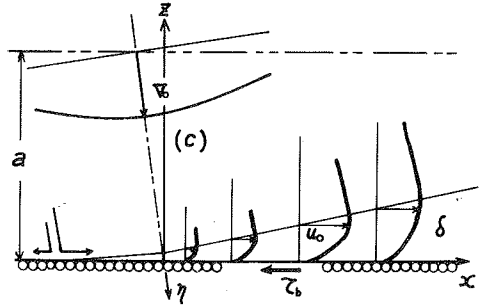


図-2 よどみ点付近に発達する境界層

$z=0$ にて $\partial\phi / \partial z = 0$ 、 $z=a$ にて $\partial\phi / \partial z = f(x)$

(2) である。 $f(x)$ として Albertson 等の式を用いれば $z \leq a$ でポテンシャル流であることを注意して、次式で近似する。 $f(x) = -v_0 \text{EXP}(-x^2/2a^2) \approx v_0 / \{1 + (x/ch) \sin^2 \theta_1\}$ 、 $\sigma = C\eta$ 、 C : 定数 (1)、(2)の解はパラメータ σ を用いて、

$$\phi = \int_0^\infty dx \int_{-a}^\infty \frac{e^{xz} + z^{-xz}}{x(e^{xa} - e^{-xa})} \cos x(x-\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

となる。境界条件と境界層外縁での流速として近似的に $u|_{z=0} = u_0$ を用いて計算を行うと次式が得られる。

$$\frac{u_0}{v_0} = z \left(\frac{ch}{\sin \theta_1} \right) \int_0^\infty \frac{\text{EXP}(-cx \sin \theta_1)}{e^{ax} - e^{-ax}} \sin(xz) dx \quad h: \text{水深}, \theta_1: \text{噴流の進入角}$$

ここで、 $1/(e^{ax} - e^{-ax}) = \sum_0^\infty \text{EXP}\{-a(2m+1)x\}$ として計算を行うと

$$\frac{u_0}{v_0} = zC \left(\frac{x}{h} \sin \theta_1 \right) \sum_{m=0}^\infty 1 / \left[\left\{ (m+1) \frac{a}{h} \sin \theta_1 + C \right\}^2 + \left(\frac{x}{h} \sin \theta_1 \right)^2 \right] \quad (3)$$

となる。噴流の中心付近のみを考えているので、さらに上式を簡略化すると、境界層外縁の速度として、

$$u_0/v_0 = A \xi / (\xi^2 + B \xi + C), \quad \xi = x \sin \theta_1 / h \quad (4)$$

が得られる。底面が粗面の場合の境界層外縁の速度 u_0/u_0 の分布を図-3に示した。図では u_0 の代わりに $u_{0,max}$ を用いている。

3. 境界層の厚さと剪断応力

以上のように、境界層外縁の速度分布が与えられるとして、粗面の場合の乱流境界層を求める。まず抵抗法則を次のように仮定する。

$$u/u_* = B_0 (z/k_s)^m \quad (5) \quad \text{境界層内の速度分布は } z \text{ を高さとして } u/u_0 = (z/\delta)^n \text{ となり、底面剪断応力 } \tau_b \text{ は } Cf/2 = \tau_b/\rho u_0^2 = \lambda (k_s/\delta)^m, \lambda = 1/B_0^2$$

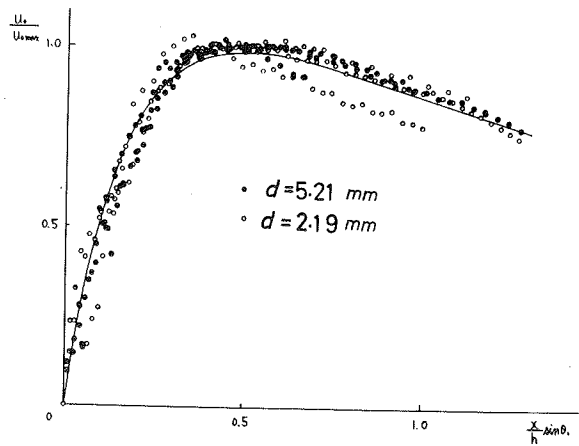


図-3 底面に生ずる境界層外縁の速度分布

ここに、 δ :境界層の厚さ、 k_s :相当粗度、

λ, m, n, B_0 :定数、Manning-S-trickler式によれば、 $n=1/6, m=1/3, \lambda=0.0125, B_0=8.94$ である。次に、境界層の方程式として、Karmanの運動量方程式を用いると次式が成立する。

$$\frac{\tau_b}{\rho u_0^2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_0} (2 + \frac{\delta^*}{\theta}) \frac{du_0}{dx}, \delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{u_0}) dy, \theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_0} (1 - \frac{u}{u_0}) dy \quad (6)$$

上式を無次元化するために、次式を用いる $\theta^*(\xi) = \theta/L, u^*(\xi) = u/u_0, \xi = x/L$ 、但し、 L は代表長

$$\frac{d\theta^*}{d\xi} + (2 + \frac{\delta^*}{\theta}) \frac{\theta^*}{u^*} \frac{du^*}{d\xi} = \lambda k_s^m (\frac{k_s}{L})^m (\theta^*)^{-m}, k_s = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \quad (7)$$

これを $\xi=0$ で $\theta^*=0$ という条件で解くと次式が得られる。

$$\theta^*(\xi) = \{A(\xi) \cdot f_0(\xi)\}^{\frac{1}{1+m}}, \delta^*(\xi) = \frac{1}{k_s} \{A(\xi) \cdot f_0(\xi)\}^{\frac{1}{1+m}} \cdot L, f_0(\xi) = \int_0^\xi (u^*)^\alpha d\xi$$

$$\alpha = (1+m)(3+2n), A(\xi) = \lambda k_s^m (1+m) (k_s/L)^m (u^*)^\alpha \quad (8)$$

図-4に $L=h/\sin\theta$ としたときの計算値と実測値を示した。また、剪断応力の係数 $Cf/2$ は次式のようになる。

$$\frac{Cf}{2} = \frac{\tau_b}{\rho u_0^2} = \lambda^{1/m} \left[\frac{k_s (u^*)^\alpha}{(1+m) f_0} \left(\frac{k_s \sin\theta}{h} \right) \right]^{1/m}, r = \frac{m}{1+m} \quad (9)$$

図-4から、境界層の厚さに粒径の影響が大きく作用していることがわかる。また、計算曲線は $n=1/3, m=2/3, \lambda=0.0396$ とした場合のものである。

参考文献

- 1) 林敏郎：日林論，1978.
- 2) 岩垣雄一：防災研年報6号，1963.

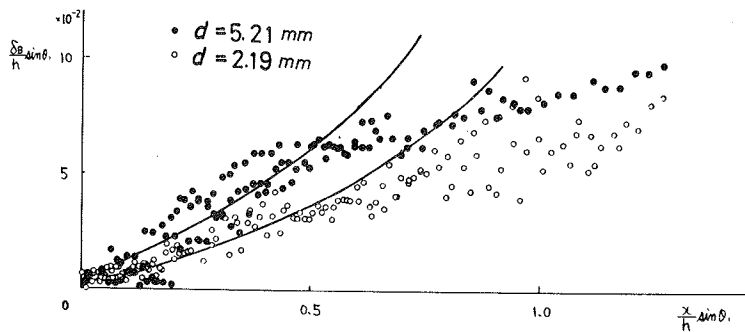


図-4 よどみ点より下流に生ずる境界層の厚さの分布