

1. はじめに

浮遊砂拡散理論の歴史は古く、ラウスの濃度分布など学問的にその成果は広く認知され、それを基礎として浮遊砂量の解析が行われている。流砂量式は複雑な流砂現象を簡単なモデルに置き換えて定式化したものであるが、その解析が一貫した流砂モデルの概念のもとに構築されていれば、その理解は容易である。しかし、もしもそうでなければ、その理論には疑問な点が生じる。本研究では、一般的に知られている拡散理論に基づく浮遊砂濃度分布の解析手法について再考し、その中の問題点を探る。また、解析に矛盾のない浮遊砂の拡散理論について提示するとともに、その理論に基づいて従来の解析方法で不明確な部分の物理的な意味を考察する。なお、以下では、考察を簡単にするために、定常等流条件下の平衡浮遊砂を対象にする。

2. 従来の浮遊砂拡散理論と問題点

2.1 拡散理論の中の浮遊砂

まず、拡散理論における浮遊砂とは何かについて明確にしておく必要がある。拡散理論では浮遊砂はランダムな乱れによって運ばれる砂粒子であり、その運動は流体の乱れ速度ベクトルと砂粒子の沈降速度ベクトルの差として単純化される。たとえば、鉛直方向 (z 方向) の浮遊砂の速度は、 $w_p = w_f - w_o$ (1) のように表す。ここに、 w_f は鉛直方向の乱れ速度、 w_o は砂粒子の沈降速度である。これが拡散理論における浮遊砂に関する唯一の定義である。浮遊砂の解析には確率過程論的手法も用いられることもある。この解析では、砂粒子が河床から浮上して河床に戻るまでのランダムな乱れによる運動を確率的に追跡するものである。どちらの理論でも浮遊砂はランダムな乱れによって運動する砂粒子という共通点を持ち、一見同じ扱いをしているように見えるが、両者は根本的に異なるものであると考えられる。たとえば、確率過程論の浮遊砂は、河床上で上向きの乱れを受けて上昇してからランダムな乱れによって運動するのに対して、拡散理論の浮遊砂は常にランダムな乱れが作用している状態を想定している。したがって、拡散理論では砂粒子に作用する鉛直方向の乱れ速度の平均値は 0 であるが、確率過程論では、河床から出発して河床に戻る間に式(1)が成り立つとすると、鉛直方向の乱れ速度の平均値は正でなければならない。このことから、拡散理論においては、一定ではないがある高さに浮上してから先を浮遊砂として取り扱うことにしなければならない。別の言い方をすれば、拡散理論では、砂粒子がある高さに浮上した状態から平均速度 w_o で沈降しながら拡散する浮遊砂の過程を解析する必要がある。

2.2 拡散方程式と問題点

式(1)から定常等流条件下の平衡浮遊砂に対する拡散方程式は式(2)のようになる。

$$\varepsilon \frac{dc}{dz} + w_o c = 0 \quad \dots\dots (2) \quad \frac{c}{c_a} = \exp\left\{\frac{w_o}{\varepsilon}(z-a)\right\} \quad \dots\dots (3)$$

ここに、 ε は拡散係数、 c は高さ z における濃度である。この式自体は浮遊砂の一つの可能なモデルによって求められたものであり当然妥当である。式(2)は境界条件を与えると容易に解析でき、たとえば、 ε を一定として、 $z=a$ で $c=c_a$ とすれば、濃度分布は式 (3) のようになる。数学の問題としてはこれでいいが、浮遊砂のモデルとしては基準点濃度 c_a の決定方法に大きな問題が発生する。

基準点濃度は大きく分けて、掃流砂濃度と連続させる手法と河床からの浮遊砂の浮上率と沈降率の釣り合いから算定する方法がある。前者の方法は、掃流砂と浮遊砂を区別しない流砂モデルであれば、濃度の連続性は満足されるとしてもかまわないと思われるが、通常使われる掃流砂と浮遊砂を区別したフレームワークによる理論では、両者の濃度が連続するという物理的根拠は明確でない。後者の方法としては、Lane・Kalinske¹⁾、芦田・道上²⁾、板倉・岸³⁾ のモデルが通常用いられる。また、一般的に境界の高さ(基準点高さ)は便宜的に河床から水深の5%の位置とするが、これについても物理的な根拠は明確でない。これらのモデルの共通点は、河床付近の基準点高さにおいて、浮遊砂の上向きフラックスを河床砂粒子の浮上量で与え、それと浮遊砂の沈

降率が釣り合うとして基準点濃度を求めるものである。平衡状態を考えているので、河床からの砂粒子の浮上率と浮遊砂の沈降率は釣り合っているが、浮遊砂モデルの境界条件として、河床砂粒子の浮上率と浮遊砂の沈降率が釣り合うという物理的解釈は難しい。この条件はあくまでも河床高さの平衡条件を表すもので、浮遊砂の境界条件には当たらないものと思われる。基準点付近には河床からではない浮遊砂本来の浮上成分もあるはずなので、従来の基準点濃度モデルには理解しにくい点があると言える。従来の拡散理論では、得られた拡散方程式を数学的に解くための境界条件の設定に多くの研究がなされたが、その際、拡散方程式を立てる理論のフレームワークと境界条件を決定するフレームワークの不整合が理論の理解を難しくしていると思われる。

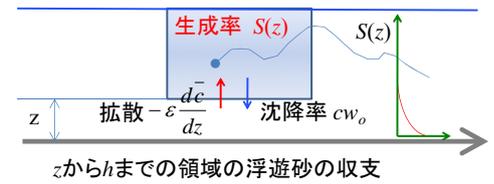


図1 浮遊砂の生成を考慮した拡散理論

2.3 境界条件

拡散理論における浮遊砂の運動過程が河床を出発して河床に戻るまでを指すのではなく、河床から浮上してある高さに達した位置を出発点として、河床に戻るまでを指すのであれば、どのような境界条件が考えられるのであろうか。浮遊砂の運動領域は河床から水面までであるので、式(2)において境界は河床となる(式(2)において水面の境界条件は考慮されている)。河床面を通して浮遊砂の沈降はあっても浮遊砂の上昇はないので、拡散方程式の拡散項=0が境界条件となるであろう。では、拡散理論の浮遊砂にとって重要な意味を持つ出発点は拡散理論でいかに考慮されるのであろうか。この問いに対して、いわゆる生成項として扱うことが妥当であると答えることができる。つぎに、生成項を考慮した拡散理論について述べる。

3. 生成項を考慮した拡散理論

図1において、z~水面までの領域における浮遊砂の質量保存則に、浮遊砂の出発点で発生する浮遊砂の生成を考慮すると式(4)が得られる。ここに、 $S(z)$ は単位面積当たりの浮遊砂の生成率である。平衡状態では河床砂粒子の浮上率 q_{su} は浮遊砂の運動領域全体の生成率と等しいので、式(5)が成り立つ。また、河床での境界条件は、前述したように浮遊砂としての鉛直上方向のフラックスはないので式(6)が成り立つ。式(4)~(6)からわかるように、河床では浮遊砂の沈降率と河床砂粒子の浮上率が釣り合うことになるが、これは定常等流条件での平衡浮遊砂状態では河床高さが平衡状態になることを意味するのであり、拡散方程式の境界条件ではない。

$$-\varepsilon \frac{dc}{dz} - cw_o + \int_z^h S(z) dz = 0 \quad \dots\dots(4) \quad \int_0^h S(z) dz = q_{su} \quad \dots\dots(5) \quad z=0: -\varepsilon \frac{dc}{dz} = 0 \quad \dots\dots(6)$$

浮遊砂濃度分布を求めるためには $S(z)$ を与える必要があり、与えられたとしても濃度分布の算定には数値計算が必要であり、実用的ではないかもしれない。しかし、浮遊砂の拡散理論を無理なく説明できるものと思われる。

4. 従来の拡散理論の境界条件の意味

式(4)を基に従来の拡散理論の意味を考えてみる。今、浮遊砂の生成が基準点高さ $z=a$ でのみ生じるものとする、生成率 S は $S(z) = \delta(z-a) \quad \dots\dots(7)$ のように基準点で集中して浮遊砂が生成されるものとして表される。これに対する式(4)の解は式(7)、(8)のようである。

$$0 < z < a: \quad c = \frac{q_{su}}{w_o} \quad \dots\dots(7) \quad a < z < h: \quad \frac{c}{c_a} = \exp\left\{\frac{w_o}{\varepsilon}(z-a)\right\} \quad \dots\dots(8)$$

式(8)は式(2)と一致する。したがって、従来の浮遊砂拡散理論は、浮遊砂の生成を基準点に集中して与えたことに一致する。ただし、従来の理論では基準点以下の領域には浮遊砂は存在しないが、式(7)のように基準点濃度と等しい一定濃度になる。このことから、従来の拡散理論の基準点高さとは基準点濃度の算定を物理的に解釈すると、基準点高さは浮遊砂の出発点で、基準点濃度は浮遊砂の生成を境界条件で表そうとして求められたものであると考えることができる。

参考文献

- 1) Lane and Kalinske: Engineering calculation of suspended sediment, Trans., A.G.U., Vol.22, 1941
- 2) 芦田・道上: 浮遊砂に関する研究(1) - 河床付近の濃度 - , 京大防災研年報, 13B, 1970
- 3) Itakura and Kishi: Open Channel Flow with Suspended Sediments, Proc. ASCE, Hy8, 1980