P50　TVD－MacCormack 法による土石流の二層流解析

岐阜大学工学部　高濱淳一郎
岐阜大学流域圏科学研究センター　藤田裕一郎
日本建設コンサルタント○蜂谷　圭
岐阜大学大学院　吉野　弘祐

1．はじめに

非定常性の高い現象に対する数値計算手法のひとつである TVD-MacCormack 法を土石流の二層流モデル[1)2)]に適用し，Leap-Frog 法による計算結果と比較し，その有用性について検討した．

2．二層流解析の基礎方程式

解析に用いた二層流モデルの模式図を図-1 に示す。二層流モデルの支配方程式は，図に示す水流層と砂礫移動層との interface を通した水流のフラックスを導入することで導かれる[1)2)]。支配方程式をベクトル形式で示すと以下のようである。

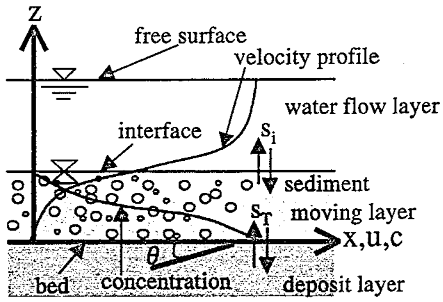


図-1　二層流モデルの模式図

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=C \qquad (1)$$

ここに，

$$U=\begin{pmatrix}\rho_w M_w\\ \rho_s M_s\\ h_w\\ h_s\\ c_s h_s\\ z_b\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}\rho_w v_w M_w+\frac{1}{2}\rho_w g h_w{}^2\cos\theta\\ \rho_s v_s M_s+\frac{1}{2}g h_s(2\rho_w h_w+\rho_s h_s)\cos\theta\\ M_w\\ M_s\\ c_s M_s\\ 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}\rho_w s_I u_I-\tau_w+\rho_w g h_w\sin\theta-\rho_w g h_w\cos\theta\frac{\partial h_s}{\partial x}\\ -\rho_w s_I u_I+\tau_w-\tau_b+\rho_s g h_s\sin\theta+\rho_w g h_w\cos\theta\frac{\partial h_s}{\partial x}\\ s_I\\ s_T-s_I\\ c_* s_T\\ -s_T\end{pmatrix}$$

である。また，式中の各変数は，ρ_w は水流層の密度，ρ_s は砂礫層の平均密度，h_w は水流層厚，h_s は砂礫移動層厚，v_w は水流層の平均流速，v_s は砂礫層の平均流速，u_I は interface の速度，$M_w=v_w h_w$，$M_s=v_s h_s$，c_s は砂礫層濃度，c_* は堆積層濃度，τ_b は河床面せん断応力，τ_w は interface のせん断応力，s_T は侵食速度，s_I は interface を通した水流のフラックス，z_b は河床位である．各せん断応力は江頭らの構成則[3)]を一様濃度に適用して評価し，侵食速度は江頭らの侵食速度式[4)]を二層流に拡張して評価した．解析では，二層状態において $c_s=c_*/2$ として解析し，全層濃度が $c_*/2$ を超える場合には全層を砂礫層として取り扱っている[1)2)]．

3．TVD－MacCormack による数値解析法

MacCormack 法では，図-2 と次式に示すように，支配方程式を予測子段階と修正子段階の二段階に差分することによって，物量量の時間発展を計算する（例えば文献 5)）．

予測子段階 $\overline{U_i}=U_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(E_{i+1}^n-E_i^n\right)+\Delta t C_i^n$ (2)

修正子段階 $U_i^{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_i^n+\overline{U_i}\right)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\overline{E_i}-\overline{E_{i-1}}\right)+\frac{1}{2}\Delta t\overline{C_i}$ (3)

ここに，$\overline{E_i}=E\left(\overline{U_i}\right)$，$\overline{C_i}=C\left(\overline{U_i}\right)$ である。

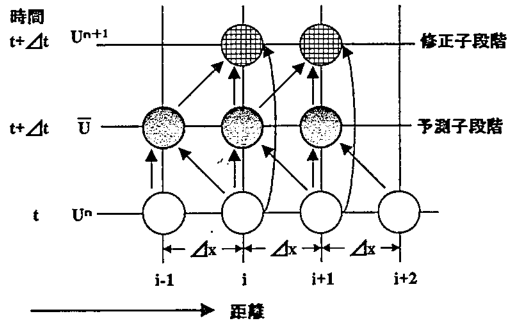
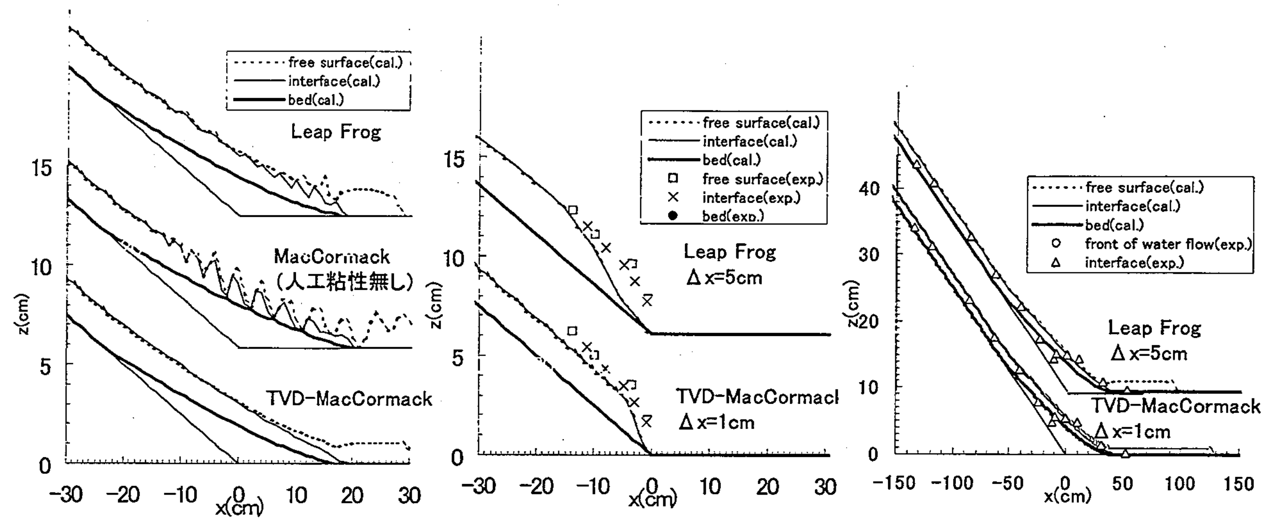


図-2　MacCormack Scheme の模式図

1980 年代に登場した TVD 法は，節点ごとに，人工粘性による修正量が適切なものになるよう調節することによって人工粘性が与えられるため，解がなまることを回避しながら，数値振動を抑えることができる．他に拡散型の人工粘性を導入する方法もあるが，人工粘性項中の係数を経験的に求める必要がある．非定常場での土石流では堆積侵食に伴う河床が大きく変動することもあって，経験的に係数を求めることが困難である．そこで，本研究では MacCormack-Scheme に導入するための人工粘性として，経験的な定数を必要としない TVD スキームを選んだ．TVD 型の人工粘性は次式のように与えられる（例えば文献 6) 7)）。

$$TVD_i=\left\{G^+\left[r_i^+\right]+G^-\left[r_{i+1}^-\right]\right\}\Delta U_{i+1/2}{}^n-\left\{G^+\left[r_{i-1}^+\right]+G^-\left[r_i^-\right]\right\}\Delta U_{i-1/2}{}^n \qquad (4)$$

ここに，$G^{\pm}\left[r_i^{\pm}\right]=0.5C(\nu)\left[1-\phi(r_i^{\pm})\right]$，　$C(\nu)=\begin{cases}\nu(1-\nu) & ,\ \nu\leq 0.5\\ 0.25 & ,\ \nu>0.5\end{cases}$，　$\Delta U_{i+1/2}{}^n=U_{i+1}{}^n-U_i^n$，　$\Delta U_{i-1/2}{}^n=U_i^n-U_{i-1}{}^n$



(a) Δx=1cm に対する計算結果の比較　　(b) 土石流フロント部の比較　　(c) 水流のフロント位置の比較

図-3 堆積過程に関する数値実験結果（上流側勾配 18° 下流側勾配 4°）

$$r_i^+ = \frac{1}{r_i^-} = \frac{\Delta U_{i-1/2}^{\ n}}{\Delta U_{i+1/2}^{\ n}}, \quad \nu = \left\{\max\left(v_i + \sqrt{gh_i}\right)\right\}\frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \Phi(r_i) = \begin{cases} \min(2r_i;1) & , \quad r_i > 0 \\ 0 & , \quad r_i \leq 0 \end{cases}$$

また，v_i，h_i は格子点 i における流速と流動深である．ここでは，いくつかの試算の結果，全層平均流速と全流動深を用いることとした．

4．Leap-Frog 法との比較

図-3 には勾配変化点を有する固定床上での土石流の堆積過程に関する数値計算結果の比較結果を示している。各図とも勾配変化点到達時から同一時間経過した時点の縦断形状を示している．(a)には Leap-Frog 法，人工粘性を導入しない MacCormack 法，および TVD-MacCormack 法で実施した結果を比較している。刻み幅を Δx=1cm と小さくすると Leap-Frog 法による計算では自由表面や imterface に数値振動が現れる．この振動は刻み時間を小さくしても解消されなかった．一方，MacCormack 法を用いた場合，TVD 型の人工粘性を導入することで，数値振動のない安定した解が得られることが確認された．(b)(c)では(a)と同じ条件に対する，Leap フロッグ法（Δx=5cm）と TVD-MacCormack 法（Δx=1cm）による計算結果を比較している．TVD-MacCormack 法では，刻み幅を小さくすることによって，勾配変化点到達時の実験によるフロント部の形状を表現することができ，フロント部の圧力勾配を精度よく評価できることによって，下流区間での流下速度も高くなっている．TVD-MacCormack 法を導入することで，支配方程式や抵抗則の特性を精度よく評価できるため，土石流による土砂流出過程，とくにフロント部の挙動を予測評価する際に有効な計算法であるといえる．

5．おわりに

MacCormack 法を著者らが提案している内部境界を考慮した土石流の一次元モデルに適用し，従来の土石流シミュレーションに多く用いられている Leap-Frog 法と比較した．比較の結果，TVD 型の人工粘性を導入した MacCormack 法によって空間分解能を高めることが可能となり，Leap-Frog 法では数値振動が生じるような刻み幅に対しても，十分な精度が得られることを示した．MacCormack 法では経験的な係数を設定することが要求される拡散型の人工粘性が用いられることが多いが，そのような設定の必要のない TVD 型の人工粘性を導入した計算法によって土石流の一次元モデルを精度よく解析できることが期待できる．

参考文献

1) 高濱淳一郎・藤田裕一郎・近藤康弘：土石流から掃流状集合流動へ遷移する流れの解析法に関する研究，水工学論文集，第 44 巻，p.683-686，2000
2) 高濱淳一郎・藤田裕一郎・近藤康弘・蜂谷圭：土石流の堆積侵食過程に関する実験と二層流モデルによる解析，水工学論文集，第 46 巻，p.677-682，2002
3) 江頭進治・宮本邦明・伊藤隆郭：掃流砂量に関する力学的解釈：水工学論文集，第 41 巻，789-794，1997.
4) 江頭進治・芦田和男・佐々木浩：土石流の流動機構，第 32 回水理講演会論文集，pp.485-490，1988
5) 日下部重幸：急勾配水路における常流・射流の混在する流れと河床変動に関する研究，鳥取大学学位論文，1997
6) 河村三郎・中谷剛：TVD—MacCormack 法による常・射流混在流の数値計算法，水工学論文集，第 37 巻、p.763-768，1993
7) 潮田智道・河村三郎：一次元保存則系差分法による数値解析の際に生じる数値振動の除去法について，水工学論文集，第 36 巻，p.349-354，1992