

東京大学農学部

○権田 豊

東京大学農学部

太田 猛彦

鳥取大学地域共同研究センター 宮本 邦明

1 はじめに

浮遊砂は、水の乱れによって流れの中に取り込まれて輸送される流砂と定義されている。定義にしたがえば浮遊砂の運動は乱れの構造と深い関係があり、浮遊運動をしている粒子の統計的な表現である濃度分布は、乱れの構造と深い関係を持っていると考えられている。一方、流れの乱れは乱流拡散による運動量輸送として特徴づけることができ、したがって浮遊砂の濃度分布も乱流拡散により表現されると考えられている。こういう考えに基づいて式1、2の浮遊砂の拡散モデルが提案されている。

$$K \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C = 0 \quad (1)$$

$$K = \beta \varepsilon_m \quad (2)$$

ここで、 K ：浮遊砂の拡散係数、 C ：浮遊砂濃度、 w_0 ：浮遊砂の沈降速度、 ε_m ：水の乱流拡散係数、 β ：砂の水への追従性をあらわすパラメータ（ ≈ 1 ）である。

筆者らは急勾配粗面水路をもちい理論河床上に堆砂の見られない固定床とみなせる条件下で実験を行った。拡散モデルをもちいて結果の検討を行ったところ、浮遊砂の水への追従性が非常に高い、つまり拡散モデルにとって理想的とされる条件下で、浮遊砂の拡散係数 K と水の乱流拡散係数 ε_m の比 β は水深平均で2～5の値となった。このような条件下では、拡散モデルでは β が1近傍の値をとらなければならない。さらには、河床近傍で浮遊砂の拡散係数が負になるという矛盾した結果が得られた。そこで式1、2のシステムの物理的意味について理論的に検討した。その結果、浮遊砂についてより深い理解を得るためには、浮遊砂の運動を式1、2ではなく式3にしたがってLagrange的に解析することが重要であり、浮遊砂の拡散係数 K 、河床からの巻き上げによる浮遊砂の供給 S を検討することが必要であることが示された。

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + u_p \frac{\partial C}{\partial x} + v_p \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial C}{\partial y} \right) + S \quad (3)$$

ここで、 u_p 、 v_p ： x 、 y 方向の浮遊砂粒子の平均速度である。

本報では、水路実験に先立って、浮遊砂粒子の素過程を数値シミュレーションし、浮遊砂の拡散係数 K および河床からの浮遊砂の巻き上げ S について検討する。

2 数値シミュレーションの概要

本報では、河床から巻き上げられた同一材料からなる球形粒子が沈降していく過程を、シミュレーションの対象としている。この過程は流体の乱れにより不規則かつ複雑になっており、この過程を決定論的に解くことは不可能である。そこで乱れの間を乱数であたえ確率論的にモデル化し、これと粒子の運動方程式を組み合わせた単純な1次元のシミュレーションモデルを考えた。モデル化にあたって以下の前提条件をもうけている。

- ① 乱れの性質は場所によらず一定で、その生起確率は一定である。
- ② 粒子としては均一粒径の球をもちい、粒子同士が影響を及ぼしあうことはない。
- ③ 対数則流速分布が成立する範囲を計算範囲とする。なお水面および河床の影響は考慮しない。

2.1 乱れのモデル化

従来、浮遊砂は重力の影響により流体に対し平均的に沈降速度 w_0 で沈降するという取り扱いをうけてい

ることから、流体と浮遊砂の粒子は図1のように異なる軌跡をとることになる。このように水の平均流線を横切って移動する粒子塊がうける乱れの統計的特性は、水の平均流線に沿って移動する流体塊のもつ乱れの統計的特性とは異なると考えられる。中立浮遊粒子で粒径が小さいような場合に、個々の粒子の運動をシミュレーションするようなどきには、乱れの構造が重要な意味をもつので、何らかのかたちでその構造を与える必要がある。たとえば粒子の速度＝流体の速度とし、流体の速度 $v(t)$ を渦の寿命時間 T_L (乱れの Lagrange 時間スケール) を考慮して、式4のようにあたえる必要がある。

$$v_{t+\Delta t} = \rho v_t + \sigma_v \lambda \quad (4) \quad \rho = \exp(\Delta t / T_L) \quad (5)$$

ここで、 γ : 平均値0、分散1の一様乱数を生成する関数、

σ_v : 乱れ強度、 Δt : 刻み時間である。

しかし浮遊砂の場合、

- ①浮遊砂粒子は流体塊を突き抜けて運動するため粒子の受ける乱れの代表尺度 T_p は T_L より小さいと考えられる。
- ②また当然乱れの構造を考慮するとき、粒子の軌跡と乱流構造を持った流体塊の軌跡が異なるため、粒子の軌跡に沿った乱れの履歴を考える必要がでてくる。

- ③拡散方程式では K 一定としており、これは現象を支配している作用時間は T_p より短く、素過程として単純マルコフ過程が成立していることを暗黙のうちに仮定している。

といった事情があるため、本モデルでは式6で表される最も単純な数値モデルをもちいている。この場合乱れ強度 σ_v については水深平均値で十分であり、Nezu ら 1) の結果を参考に式 (7) であたえた。

$$v_t = \sigma_v \lambda \quad (6) \quad \sigma_v = \left\{ \int_0^h 1.27u_* \exp(-y/h) dy \right\} / h = 1.27u_* \left(\frac{e-1}{e} \right) \quad (7)$$

ここで、 u_* : 摩擦速度、水深 : h である。

2. 2 浮遊砂粒子の運動方程式

乱流中を運動する浮遊粒子の運動方程式は一般に次8で表される。

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{3}{4d(\sigma_s + 1/2)} C_D |v_f - v_p| (v_f - v_p) + \frac{3}{2(\sigma_s + 1/2)} \frac{dv_f}{dt} - \frac{\sigma_s - 1}{\sigma_s + 1/2} g + \frac{9}{d(\sigma_s + 1/2)} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} B(t) \quad (8)$$

$$C_D = \frac{24}{R_{cd}} + \frac{3}{\sqrt{R_{cd}}} + 0.34, \quad R_{cd} = \frac{|v_f - v_p| d}{\nu}$$

ここで、 d : 粒径、 σ_s : 粒子の比重、 ν : 水の動粘性係数、 C_D : 抗力係数、 v_p : 浮遊砂粒子の鉛直方向速度、 v_f : 流体の鉛直方向速度である。

式8の右辺第1項は抗力を、第2項は流体の加速度にともない生じる圧力を、第3項は重力を、第4項は流体および粒子が加速度運動をする場合の履歴効果を表す Basset 項である。本シミュレーションの場合、乱れを乱数で単純にあらえており、時空間的な乱流構造を考慮していない。そのため第2項、第4項は、モデルの単純化のために考慮しない、つまり式9の方程式をもとに解析を行った。式9を数値計算に

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{3}{4d(\sigma_s + 1/2)} C_D |v_f - v_p| (v_f - v_p) - \frac{\sigma_s - 1}{\sigma_s + 1/2} g \quad (9)$$

より解くにあたり Runge-Kutta 法をもちいた。なお計算は w_0/u_* が 0.042~46 粒径が 0.01~10[cm] の範囲で計 168 ケース行った。また砂粒子が河床から巻き上げられ、沈降を開始しようとしている状態 (y 方向の初速度 0) を初期条件とし、計 1000 個の粒子を対象とした。詳細については文献 2) を参照されたい。

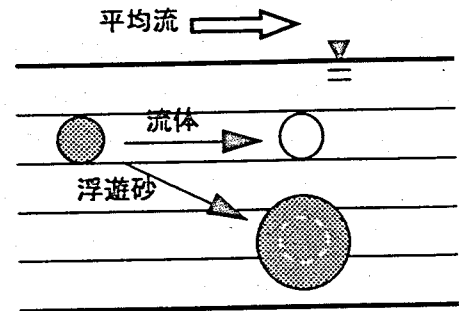


図1 浮遊砂の軌跡

3 シミュレーション結果

3. 1 沈降速度

沈降速度は乱れ強度が大きくなると若干減少する傾向が見られるが、本実験の範囲では、せいぜい数%程度減少するだけでほぼ静水中の沈降速度と等しいとみなせる結果となった。

3. 2 拡散係数

一様等方性の乱れの場合において、原点に集中していた粒子が時刻 $t=0$ に放出されるものとする。個々の粒子は、 y 軸上を時間とともに不規則に運動するが、時刻 t における粒子の位置を Y とすると、拡散係数 K は式 10 で定義される。浮遊砂の拡散係数 K は式 11 から求めた。なお比較のため浮遊砂粒子のうける乱れ v_L の積算値 Y_L を式 12 のように定義し、式 12 から見かけの水の拡散係数 ε_L をもとめた。

$$K = \frac{1}{2} \frac{d\overline{Y^2}}{dt} \quad (10) \quad Y_L = \int_0^t v_L dt \quad (11) \quad \varepsilon_L = \frac{1}{2} \frac{d\overline{Y_L^2}}{dt} \quad (12)$$

図 2 は乱れ強度 10.0 [cm/sec] の条件での浮遊砂の位置 Y_L [cm] と乱れの積算値 Y_L [cm] の時間変化をあらわしたものである。 Y_L は浮遊砂粒子の平均的な軌跡からの変位 $Y_L + wot$ であらわしている。ただし、粒径が小さいと高周波の乱れにも応答するが、粒径が大きくなるにつれて低周波の乱れにしか応答しなくなる傾向が読みとれる。図 3 は浮遊砂の拡散係数 K の時間変化をあらわしたものである。浮遊砂の拡散係数 K は見かけの水の拡散係数 ε_L で割って無次元化した。 K は ε_L に比べて初期の拡散の程度が小さいが時間の経過とともにの両者の差は小さくなることがわかる。また粒径が大きくなるほど、 K と ε_L の差の解消により長い時間が必要であることがわかる。図 4 は十分な時間が経過した後の K と ε_L の比と乱れ強度 σ_v の関係を表したものである。乱れ強度によらず K と ε_L の比はほぼ 1 とみなせることがわかった。

3. 3 拡散モデルの評価

$t=0$ で、ある高さ $y=\xi$ から粒子を放出した後の、出発点の条件付きの粒子の存在確率分布 $p(y, t, \xi)$ をシミュレーション結果から算出した。河床からの浮遊砂の巻き上げを $S(y)$ とすると、系が定常とみなせるときの浮遊砂の濃度分布 $C(y)$ は式 13 のように表される。式 14 をもとに浮遊砂の巻き上げの分布形 $S(y)$ と濃度分布 $C(y)$ の関係を検討した。濃度分布は、Rouse の拡散モデルの解析解を用いた。

$$C(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{K_3}^h p(y, t, \xi) S(\xi) d\xi dt \quad (13)$$

3. 3. 1 存在確率分布

図 5 は $p(y, t, \xi)$ の $\xi=6$ [cm] としたものである。浮遊砂粒子の拡散はみられるものの、沈降速度に比べて拡散が小さいことがわかる。

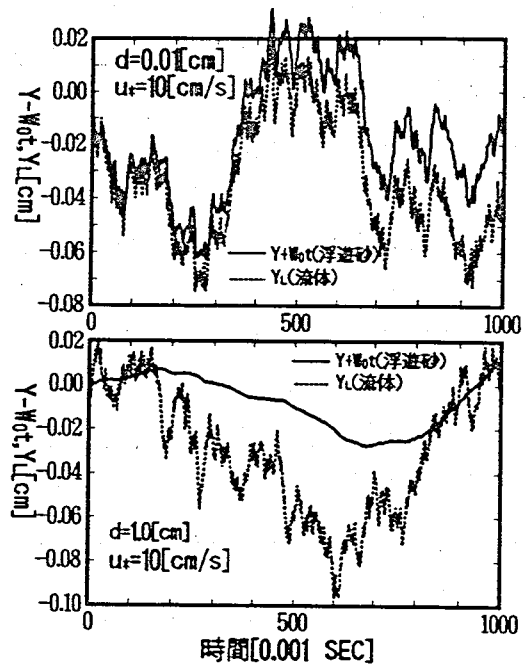


図 2 浮遊砂の乱れへの応答

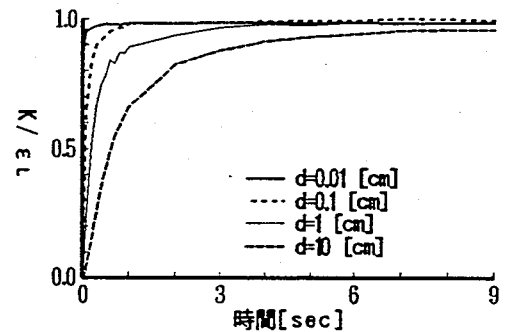


図 3 拡散係数の時間変化

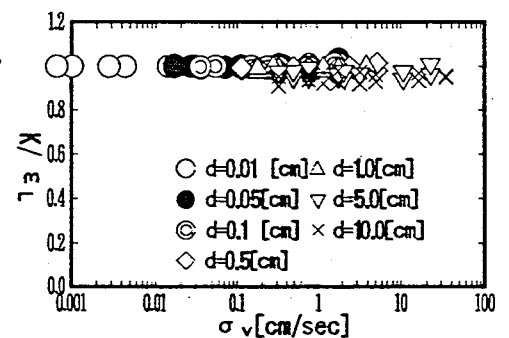


図 4 K/ε_L と σ_v の関係

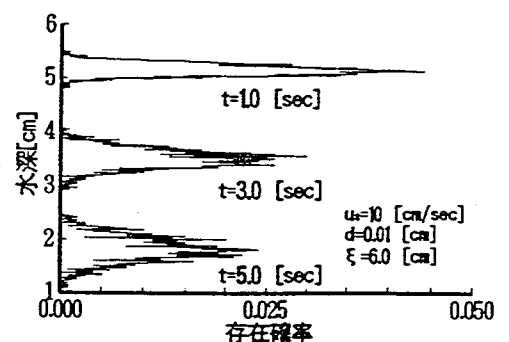


図 5 浮遊砂の存在確率の時間変化

この傾向は他の全てのケースについてもあてはまる。またこの解析では、浮遊砂は十分長い時間が経過すると全て河床に沈降してしまうことになるので、河床から巻き上げによる沸き出しを考慮しなければ、システム全体が定常にならないことになる。図6は $y=\xi$ から連続的に単位濃度の浮遊砂を放出したときの濃度分布であるが、濃度は $y>\xi$ では0、 $y<\xi$ ではほぼ一定になっている。値のばらつきは数値計算で対象としている粒子が有限個であることと、計算の都合上時間と空間が離散的になっているためだと考えられる。これから同一点から連続的に浮遊砂をソースとしてあたえた場合、拡散の効果はマクロ的には無視できることがわかる。この現象は、浮遊砂粒子の拡散に比べて沈降速度が勝っているため、出発点よりも上に拡散することができないためと考えられる。

3. 3. 2 濃度分布CとS

C(y)にRouseの拡散モデルを用いたときの

Sの分布形を図7に示す。図中の実線は拡散モデルで $\beta=1$ としたときのS、破線は $\beta=2$ としたときのSである。これから浮遊砂とは、河床から水面近くまで巻き上げられた後に沈降する流砂である

ことがわかる。また、Sの分布が少し変化するだけで β が敏感に変化することがわかる。またこのとき水深yにおける沈降による下向きのフラックスと水面hから水深yまでのSの総和を比較したところ式15の関係があることがわかった。これはマクロ的には拡散が無視できることを考えると当然の結果といえる。

$$w_0 C \sim \int_y^h S(\xi) d\xi \quad (14) \quad K = \int_y^h S(\xi) d\xi / \left(\frac{dC}{dy} \right) \sim -w_0 \int_y^h S(\xi) d\xi / S(y) \quad (15)$$

また、式14と式1の拡散モデルを比較した場合、従来は拡散による上向きのフラックスをあらわすとされていたのは、河床からの浮遊砂の巻き上げによる上向きのフラックスをあらわしたものであったといえる。したがって濃度分布を拡散モデルで評価しようとする場合、式15を考慮すると、式15をもちいて評価することになりSの分布形により拡散係数Kが変化し、それが β の値の変化として現れるのである。

4. まとめ

本論文は、浮遊砂の拡散モデルの物理的な意味を明確にするために、単純な数値シミュレーションにをおこなったところ、浮遊砂の河床からの巻き上げをあたえ、系が見かけ上定常とみなせる条件では、浮遊砂の拡散が濃度分布にあたえる影響は無視でき、これは浮遊砂の拡散が沈降に比べて小さいためであると考えられること、浮遊砂の濃度分布は河床からの巻き上げの分布S(y)によって決定されることがわかった。今後は、S(y)がこういった現象に支配されているのか、特に河床近傍での乱れの構造との関係について研究していきたい。

参考文献

- 1) Nezu, I. and Nakagawa, H : Turbulence in Open-Channel Flows, IAHS Monograph, 1993.
- 2) 権田 豊 : 急勾配粗面河床上における浮遊砂の挙動解明のための基礎的研究 東京大学修士論文 1995

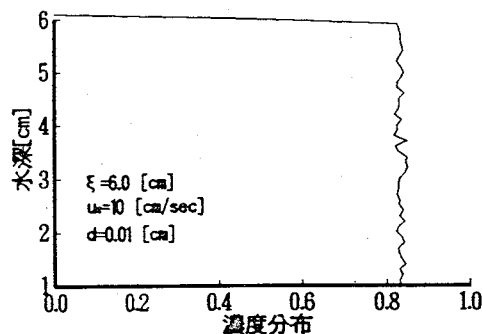


図6 濃度分布 (点源から連続放出)

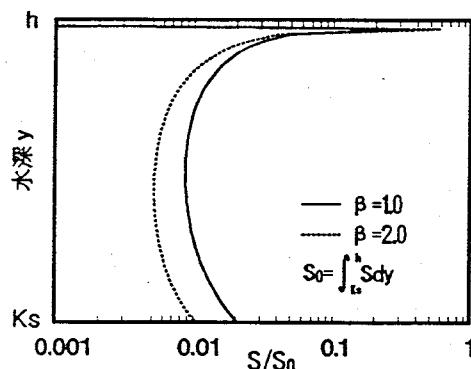


図7 Sの分布形