40　浮遊砂の機構に関する考察

東京大学農学部　○権田　豊
東京大学農学部　太田　猛彦
（財）砂防・地すべり技術センター　宮本　邦明

1．はじめに

浮遊砂とは水の乱れによって流れの中に取り込まれて輸送される流砂のことをいう。[1] 乱れに取り込まれて輸送される粒子の運動は乱れの構造と深い関係があり、浮遊運動をしている粒子の統計的な表現である濃度分布は、乱れの構造と深い関係を持っていると考えられている。乱れは乱流拡散による運動量輸送として特徴づけることができ、従って浮遊砂の濃度分布も乱流拡散により表現されると考えられている。こういう考えに基づいて浮遊砂の拡散モデルが提案されている。[2]

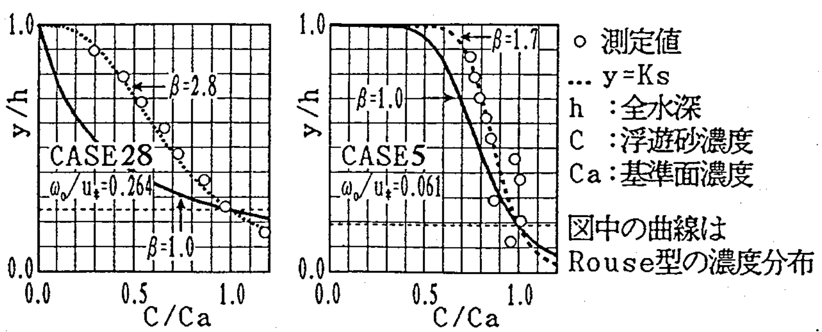
昨年度は[3]、急勾配で河床がアーマコートで覆われた状況での浮遊砂の挙動を解明するために、急勾配粗面水路を用い理論河床上に堆砂の見られない条件下で実験を行い、次式で表される拡散モデル

$$K\frac{dC}{dy}+\omega_o C=0 \qquad (1)$$

を用いて結果の検討を行った。ただしK：浮遊砂の拡散係数、C：浮遊砂の体積濃度、ω_o：浮遊砂の沈降速度である。その結果以下の点が指摘された。

1）Rouse[2] に従い、浮遊砂の拡散と水の運動量拡散の相似性を期待して実験結果を解析したが、浮遊砂の拡散係数Kの運動量拡散係数ε_mに対する比βは1よりかなり大きい値をとることがあること、またβの値は水深により変化すること、そしてその傾向は砂の水の乱れへの追随性の指標ω_o/u_*が小さくなるほどすなわち浮遊砂の水への追随性がよくなるほど顕著であることがわかった。このような砂の水への追随性がよくなるに従って両拡散係数が一致しなくなるという傾向は、このモデルにしたがうかぎり運動量拡散と浮遊砂の拡散が同一のプロセスには支配されていないという結果を導くことが指摘された。

2）ω_o/u_*が小さい条件では、浮遊砂の濃度が水面から河床に向かって増加し、理論河床からおよそ相当粗度Ksだけ離れた地点で極大値をとり、以後河床に近づくにつれて減少するという濃度分布形が得られた。（図1参照）Ksから河床へ向かって濃度が減少するという分布形は、このモデルで表現しようとすると拡散係数Kが負の値をとることになり、これは物理的に意味のないことになる。



図．1　濃度分布形

以上の結果からほぼ固定床とみなせる条件のもとでは、浮遊砂の拡散モデルでは現象を十分に理解することが出来ないことが分かった。そこで本報では拡散モデルが物理的にどういう意味をもっているかを検討し、上記の実験結果を含む浮遊砂一般の現象の理解を深める手始めとしたい。

2．拡散方程式

ある領域内のある物理量ϕの保存則は、

$$\frac{d}{dt}\int_V \phi\, dV = \int_V S\, dV - \oint_S \vec{q}\cdot\vec{n}\, ds \qquad (2)$$

とあらわされる。ただし、S：内部湧き出し、$\vec{q}$：境界を通って出入りするϕのフラックス、$\vec{n}$：境界面垂直な単位ベクトルである。

式（2）の左辺の積分と微分の順番を入れ替えると、

$$\text{左辺} = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_s (\phi \vec{u})\cdot\vec{n}\, ds$$

となり（ただし$\vec{u}$は領域の境界の移動速度）Green-Gaussの定理を用いて

$$\text{左辺} = \int_V \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\vec{u}) \right\} dV$$

と表される。第2項を展開すると

$$\text{左辺} = \int_V \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{u} \right\} dV$$

かつ$\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\phi = \dfrac{D\phi}{Dt}$、また非圧縮性流体の場合$\nabla\cdot\vec{u} = 0$であるから

$$\text{左辺} = \int_V \frac{D\phi}{Dt} dV$$

一方、式（2）の右辺は第2項にGreen-Gaussの定理を用いると、

$$\text{右辺} = \int_V S - \nabla\cdot\vec{q}\, dV$$

さらにFickの法則より$\vec{q} = -\varepsilon(\nabla\phi)$なので、

$$\text{右辺} = \int_V S + \nabla\cdot(\varepsilon\nabla\phi)\, dV$$

ただしεは拡散係数である。以上より積分区間を微小要素にとると、式（3）の拡散方程式が導かれる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_P\frac{\partial \phi}{\partial x} + v_P\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S \qquad (3)$$

ただしu_P、v_Pは物理量ϕをもつ微小要素の平均的な移動速度である。物理量ϕは水の拡散によって運ばれるので普通u_P、v_Pは流れの平均速度u、vと等しいとおくことができる。ゆえに式（3）は、平均速度（u，v）で移動する任意の流体塊について成立する。また式（3）から、この現象をEuler的に捉えた場合、体積要素の移動速度は移流速度のかたちで表現されることが分かる。

3．浮遊砂の拡散方程式

2．の拡散方程式は分散質の密度σが分散媒の密度ρと等しいとみなせるような条件下で成り立つものであり、浮遊砂を含む流れのようにσがρに比べて無視できないくらいに大きい場合、重力が分散質に及ぼす影響を考慮しなくてはならない。浮遊砂は流体に対して平均的にある速度ω_0で相対的に沈降するという扱いを受けることが多い。このとき流体の速度を考慮すると浮遊砂は平均的に（u ，$v-\omega_0$）の速度で運動していることになるので、浮遊砂の体積濃度をＣ、浮遊砂の拡散係数をＫとすると式（３）は$u_p=u$ 、$v_p=v-\omega_0$ かつ浮遊砂の内部湧き出しＳ＝０であるから式（４）のように表現される。

$$\frac{DC}{Dt}\equiv\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+(v-\omega_0)\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial C}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

この方程式は、平均速度（u ，$v-\omega_0$）で移動する微小要素について成立していることになるので、２次元等流ではこの微小要素の軌跡はせいぜい水面に始まり水の流線を斜めに横切って河床で終わるような有限の軌跡をとることになる。したがって式（４）が示す軌跡に沿って運動している間には、一般的には定常状態に至っているとは考えられず、濃度分布は式（４）の非定常な状態を空間にわたって積分することにより評価しなくてはならないことになる。もし濃度分布を定常状態におけるそれとして評価しようとすれば、微小要素の運動を水の流線と一致させる、つまり浮遊砂が$u_p=u$ 、$v_p=v$ なる運動をしているものとして取り扱わねばならない。すなわちこの場合、浮遊砂の拡散に関する全微分の項は$\frac{DC}{Dt}\equiv\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}$ のかたちで表される必要があり、式（３）と比較すると

$$\frac{DC}{Dt}\equiv\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=K\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)+\omega_0\frac{\partial C}{\partial y} \qquad \left(\omega_0\frac{\partial C}{\partial y}\,;\,S\right) \qquad (5)$$

のように表される。この式の右辺第２項は式（３）より消散項あるいは生成項としての意味をもつことがわかる。そしてこの項は本来場の勾配というかたちではなく直接、場の関数として与えられるべきものである。いずれにしても、系が定常とみなせるとき式（５）において$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial C}{\partial y}=0$なので式（５）をｙで積分すると

$$K\frac{\partial C}{\partial y}+\omega_0 C=\alpha \qquad \left(\omega_0 C\,;\,\int S\,dy\right) \qquad (6)$$

が導かれる。ただしαは積分定数である。式（６）で$\alpha=0$とすると式（１）のいわゆる浮遊砂の拡散方程式となる。式（６）の左辺第２項は本来消散項か生成項の意味しか持たないが、拡散による浮遊砂の上向きのフラックスと沈降速度で沈降する浮遊砂の下向きのフラックスのつりあいを表現しているという解釈が与えられている。

またRouse[2]は式（１）（すなわち式（６））を浮遊砂の拡散方程式と考え、浮遊砂の拡散が流れの運動量拡散とほぼ同一のプロセスに支配されているとし、ほぼ１に近いβを用いて式中のＫを

$$K=\beta\,\varepsilon_m \qquad (7)$$

と表せるとした。ところで式（6）の左辺第2項は、浮遊砂の生成項あるいは消散項を積分したものであるのでその分布形が変われば、流れの構造を変化させなくとも濃度分布形が自由に変化すると考えられる。もし浮遊砂の生成、消散の分布形が変化し濃度分布形が変化した場合、それをRouseに従って式（1）で評価しようとすると式中のKが変化し、それにともなってβの値が変化することになる。つまりβは式（7）で示されるような両拡散係数の比というより、むしろ浮遊砂の生成あるいは消散の分布形に応じて変わるものと考えられる。したがって、一般にβは空間的に一定である必要はなく、また1に近い値をとる必要もないと考えられる。

系を定常として扱うことにより、浮遊砂の拡散方程式は容易に解けるようになるが、かえって式の各項の意味は曖昧になり、浮遊砂の運動を理解するのを困難にしていると思われる。したがって浮遊砂について深い理解を得るためには、非定常の方程式，式（4）を用いて浮遊砂の運動やその統計的表現である濃度分布を検討し、定常として扱ったきの結果と比較検討することが望まれる。浮遊砂の平衡状態における濃度分布は、十分な緩和区間をとりその各点において河床から巻き上げられ沈降を開始しようとしている浮遊砂の濃度を境界条件として与え、各点から開始された浮遊砂の運動を式（4）を用いて追跡し、その軌跡を緩和区間終点で重ね合わせることによってはじめて得られるものである。この平衡濃度を求める過程でまず重要なのは、境界条件の与え方である。これは、各点での境界条件の与え方次第で平衡濃度の分布形が著しく変化することが予想されるためである。この境界条件は浮遊砂の生産源となる河床近傍での濃度分布、および流れの構造と密な関係を持っていると思われるのでこれらを検討する必要がある。次に重要なのは式（4）の速度に関する項および拡散係数Kの与え方である。式（4）では浮遊砂の平均速度を水の流速から類推して平均速度（u , $v-\omega_o$）で与えているが、このω_oには静水中の砂の沈降速度が用いられており、これが妥当とは思えない。また浮遊砂と水の流線が異なることから、浮遊砂の拡散係数Kを水の運動量拡散係数ε_mに比例係数をかけるというような単純なかたちで表現することは出来ない。したがって水と浮遊砂について両者の相互作用を考えて各々の運動方程式をたて、浮遊砂の拡散過程を検討し沈降速度ω_oおよび拡散係数Kの分布形を評価すべきであると思われる。

4．まとめ

今回の検討で、浮遊砂についてより深い理解を得るためには式（4）の方程式に沿って浮遊砂の運動を解析することが重要であること、また式（4）を解くためには境界条件として、河床から巻き上げられ沈降を開始しようとしている浮遊砂の濃度分布を与えることが必要であること、そして浮遊砂の沈降速度ω_oおよび浮遊砂の拡散係数Kについて検討する必要があることがわかった。したがって今後は流れの構造、特に浮遊砂の巻き上げを支配していると思われるKs以下の領域での流れの構造について明らかにするとともに、浮遊砂と水の相互作用についても検討をおこなっていきたい。

＜参考文献＞

1）吉川秀夫：流砂の水理学　丸善出版株式会社，pp.113，1985.

2）Rouse，H.：Modern conception of the mechanics of turblence，Trans.ASCE，Vol.102，pp.463～543，1937.

3）権田　豊・太田猛彦・宮本邦明：粗度の大きな粗面固定床上の浮遊砂　新砂防（投稿中）