

1. はじめに.

山地斜面の形状は表層物質の移動によって形成され、その過程は平野らが導いた斜面発達モデルによって説明されているが、山地溪流の縦断形状も溪床における砂礫の移動によって形成されるので、その形成過程もやはり斜面発達モデルによって説明される。さらに、砂防ダムの堆砂面縦断形状の変動について考えてみると、これも溪床砂礫の移動によっておこる現象であるから、基本的には溪床縦断形状の形成と同一の現象であり、それを表現するには前述の斜面発達モデルが有効な手段になりうるものと思われる。これに関する従来の研究は、溪床に関するものと砂防ダムの堆砂に関するものがそれぞれに行なわれ、その相互の関連性についてはあまり検討されていなかったようである。

本研究では、斜面上における砂礫粒子の移動に関する遷移確率から斜面発達モデルと同型の微分方程式を導き、それを解いて得られる曲線が、そのパラメーターの与え方によって溪床縦断曲線に一致したり、砂防ダムの堆砂形状曲線に一致したりすることを示すとともに、その経年変化について検討した。

2. 斜面上における砂礫粒子の移動確率にもとづく斜面発達モデルの誘導

ある時刻 t におけるある横距 x の地英の高度分布を $h(t, x)$ で表わすとき、この関数 $h(t, x)$ によって斜面形状があらわされる。斜面の発達を時間 t と $t + \Delta t$ の間を考えることとし、この間に斜面上の砂礫が Δx だけ移動して斜面高度が変化するものと仮定する。このとき、横距 x の近くで Δx だけ粒子（砂礫）が移動する確率を p 、そのまゝの位置に留まる確率を q 、さらに摩擦して消滅する確率を r とすると定義により

$$p + q + r = 1 \quad \text{----- (1)}$$

が成立する。以上のような確率を定義すると、時間 $t + \Delta t$ における高度分布 $h(t + \Delta t, x)$ は次のようになる。

$$h(t + \Delta t, x) = p h(t, x - \Delta x) + q h(t, x) \quad \text{----- (2)}$$

(2) 式の両辺から $h(t, x)$ を減じて (1) 式を用いると

$$h(t + \Delta t, x) - h(t, x) = p \{h(t, x - \Delta x) - h(t, x)\} - r h(t, x) \quad \text{----- (3)}$$

が得られる。砂礫が摩擦消滅する確率 r は時間間隔に比例するとして $r = r \cdot \Delta t = C(t)$ とおき (3) 式のテーラー展開を行なってから両辺を Δt で割ると次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{p \Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p (\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - C(t) \cdot h \quad \text{----- (4)}$$

さらに、 $p(\Delta x)^2 / 2 \Delta t \approx \Delta \sigma^2 / 2 \Delta t$, $p(\Delta x) / \Delta t \approx \Delta m / \Delta t$ ----- (5)

と変換してそれぞれ a , b とおいて (4) 式に代入すると、次のような斜面発達モデルと同型の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - b \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - C \cdot h \quad \text{----- (6)}$$

程式が得られる。

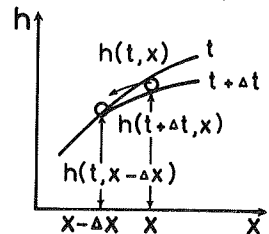


図-1 斜面上粒子の移動

(6)式的一般解はすでに得られ、それによって斜面の発達過程が平野らによって論議されているが、ここでは、その解と異なった解を求め、境界条件を与えて溪床の縦断形状形成過程および砂防ダムの堆砂形状の変動について考察する。

3. 方程式の解.

まず、斜面発達に関する微分方程式(6)式の解を

$$h = X(x) \cdot T(t) \quad \dots\dots\dots (7)$$

とおくと、

$$\partial^2 h / \partial x^2 = (h/X) \cdot (d^2 X / dx^2), \quad \partial h / \partial x = (h/X) \cdot (dX/dx), \quad \partial h / \partial t = (h/T) \cdot (dT/dt) \quad \dots\dots\dots (8)$$

が得られ、(8)式を(6)式に代入して整理すると、

$$\frac{a}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{b}{X} \cdot \frac{dX}{dx} - (C + \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dt}) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

となるから、これを解けばよい。ここで、 T に関する項を $-\alpha \cdot C$ とおくと

$$dT/T \cdot dt = -\alpha \cdot C \quad \dots\dots\dots (10) \quad \therefore T = e^{-\alpha C t} \quad \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。さらに、(10)式を(9)式に代入して得られる方程式の解を $X = e^{n_1 x}$ と仮定すると

$$X = A e^{n_1 x} + B e^{n_2 x} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{こゝに、} \quad n_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4(1-\alpha) \cdot C}{a}} \right) > 0, \quad n_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4(1-\alpha) \cdot C}{a}} \right) < 0$$

が得られる。従って(10)式と(12)式を(7)式に代入すると、微分方程式(6)の特解は

$$h = (A e^{n_1 x} + B e^{n_2 x}) \cdot e^{-\alpha C t} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。この式に境界条件を与えて係数 A 、 B を決定する。まず、変動がはじまる初期条件を $t=0$ とし、そのとき基準の英を $(0,0)$ として $x=0$ で $h=0$ とすると、 $A+B=0$ 、故に $B=-A$ となる。さらに基準英 $x=0$ における斜面勾配を i_c とすると、

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)_{x=0} = i_c = A(n_1 - n_2) \quad \therefore A = \frac{i_c}{n_1 - n_2} = \frac{i_c}{\sqrt{(b/a)^2 + 4(1-\alpha) \cdot C/a}} \quad \dots\dots (14)$$

となり、斜面形の変動に関する式が(15)式のように導かれる。

$$h = \frac{i_c \cdot (e^{n_1 x} - e^{n_2 x}) \cdot e^{-\alpha C t}}{\sqrt{(b/a)^2 + 4(1-\alpha) \cdot C/a}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

4. 溪床の縦断形状

実在する現溪床の多くは上述の斜面発達の過程の1ステージにあると思われるが、比較的短い期間をとって考えると、現溪床は過去に発生した土石流などによる急激な地形変化の結果形成されたもので、現在一時的な平衡状態にあるとみることが出来る。このように考えた場合の溪床縦断形状は、平衡条件すなわち $\partial h / \partial t = 0$ としたときの解で示される。(6)式で $\partial h / \partial t = 0$ とした解は(15)式で $\alpha=0$ と書いたものと等しく、次式のようにあらわされる。

$$h = \frac{i_c \cdot (e^{n_1 x} - e^{n_2 x})}{\sqrt{(b/a)^2 + 4 \cdot (C/a)}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

係数 n_1 、 n_2 の大小関係は $|n_1| > |n_2|$ となるから、(16)式の曲線形は下に凸の指数曲線となる。

5. 砂防ダム堆砂形状の変動

砂防ダムの堆砂変動は、前述の斜面形状の形成過程が短い正間で、短い時間になされている現象であると解釈することができる。ここで、砂防ダム背後の、水平距離 x の短い正間を対象に堆砂過程を考えると、係数 b は侵食の場合と逆符号、 $b < 0$ となるから、そのときは $|n_1| < |n_2|$ の関係から、 $e^{n_1 x} \approx 1 + n_1 x$ として(15)式を書きかえる。さらに、砂防ダムに土砂が貯留され、天端と同じ高さで水平になったあと勾配がつきはじめる時点を初期状態 $t=0$ とすると、 $t=0$ のとき $h=H$ (H はダムの高さ) という条件が与えられる。その後の砂防ダム堆砂形状の経時変動は次式のようにあらわされそれを図示すると図-2 のようになる。

$$h = H + \frac{i_c \{ (1 - e^{n_2 x}) + n_2 x \} (1 - e^{-\alpha c t})}{\sqrt{(b/a)^2 + 4(1-\alpha) \cdot c/a}} \quad \text{----- (17)}$$

このようにしてある時点まで堆砂が進行したあと、土砂の供給が減少すると、こんどは砂防ダム上流の堆積体が侵食されはじめ、堆砂高は低下することになる。この場合は元の式がそのままではまるから、係数 n の大小関係は $|n_1| > |n_2|$ となり、 x の短い正間を対象にして $e^{n_2 x} \approx 1 + n_2 x$ を用いると砂防ダム堆砂形状の下降変動は次式のようにあらわされ、その計算結果の一例は図-2 のようになる。

$$h = H + \frac{i_c \{ (e^{n_1 x} - 1) - n_1 x \} \cdot e^{-\alpha c t}}{\sqrt{(b/a)^2 + 4(1-\alpha) \cdot c/a}} \quad \text{----- (18)}$$

6. 溪床の縦断形状形成と砂防ダム堆砂形状変動の相互関係

以上の考察により、溪床縦断形状の形成も砂防ダム堆砂形状の変動も土砂の移動にともなって進行する現象であるという観点からみれば、本質的には同一の現象であり、その形状は同じ曲線形であらわされるということが説明された。しかし、一見したところ両現象には、時間的にも空間的にも何らかの相異があるように見えるわけで、そのような差異が生じるのは何故かということになるが、それは結局(6)式の係数 a , b , c のちがいによるということになる。

前述のように、現溪床の縦断形状は $\partial h / \partial t = 0$ の状態にあり、高度の変化もないと考えて $c=0$ とすると、現溪床の縦断形状は次のようにあらわされる。

$$h = \frac{i_0}{(b/a)} \cdot (e^{\frac{b}{a} x} - 1) \quad \text{----- (19)}$$

この式を、三重県の朝明川上流、山梨県北部および富山県山間部にある21本の溪流にあてはめて係数 (b/a) の値を求めた結果、その値は溪流ごとにきまり、

$$(b/a) = 0.0003 \sim 0.001 = 10^{-3.5} \sim 10^{-3.0}$$

となった。²⁾ これは何々の係数 a , b は気候変動と流量や流砂量などの水理量によって種々な値を

とりうるが、その比 b/a は一溪流ごとに固有の一定値となり、それが国の長さ数km以下の小渓流ではほぼ前記の値になるのではないかと思われる。ここで、(15)式の分母の平方根内の関係より、 $(b/a)^2 = 4(1-\alpha) \cdot c/a$, $\alpha = 0.3$ とし、 $b/a = 10^{-3.5} \sim 10^{-3.0}$ を用いて a , b , c の関係を求めると

表-1. 斜面発達モデルの係数

$a (m^3/year)$	$b (m/year)$	$c (1/year)$	半減期(year)	
10^2	$10^{-4.5} \sim 10^{-1}$	$10^{-5.45} \sim 10^{-8.45}$	$10^{5.3} \sim 10^{8.3}$	地科学 的単位
10^3	$10^{-2.5} \sim 10^0$	$10^{-8.45} \sim 10^{-3.45}$	$10^{4.3} \sim 10^{3.3}$	
10^4	$10^{-0.5} \sim 10^1$	$10^{-3.45} \sim 10^{-1.45}$	$10^{3.3} \sim 10^{2.3}$	
10^5	$10^{1.5} \sim 10^2$	$10^{-1.45} \sim 10^{-0.45}$	$10^{2.3} \sim 10^{1.3}$	
10^6	$10^{2.5} \sim 10^3$	$10^{-0.45} \sim 10^{-0.45}$	$10^{1.3} \sim 10^{0.3}$	砂防学 的単位
10^7	$10^{3.5} \sim 10^4$	$10^{-0.45} \sim 10^{0.55}$	$10^{0.3} \sim 10^{0.7}$	

表-1 のようになる。なお、表中の半減期とは $e^{-ct} = 1/2$ となる t の値である。

これにより、係数 a , b , c の値、特に a の値によって土砂の侵食、堆積が地形的な単位で進行するか、砂防学的な単位で進行するか判断されることになる。そこで、係数 a について検討してみる。

係数 a は平野によって従順化係数とよばれているもので、その値は気候の変化などによって変わるものとして、養元山地で $0.25 \text{ m}^2/\text{year}$ 、木曾川の斜面で $0.02 \sim 0.05 \text{ m}^2/\text{year}$ が与えられている³⁾。これらの値をもとに半減期を推定すると 1000 万年以上になり、溪床縦断の形成が地形的な単位で進行していることが示されている。

次に砂防ダムの堆砂形状変動の場合における係数 a について考えてみる。芦田らは水流の運動方程式、流砂量式および流砂の連続式を用いて河床変動に関する拡散方程式 $\partial h / \partial t = K \cdot (\partial^2 h / \partial x^2)$ を導き、拡散係数として次式を与えている⁴⁾。

$$K = \frac{21}{20} \cdot \frac{1}{(1-\lambda)} \cdot \frac{\varphi \cdot F \cdot g \cdot u_*}{\{(C/P)-1\} \cdot V} \quad \text{----- (20)}$$

ここに、 g : 単位巾流量、 φ, F : 佐藤、吉川、芦田式中の係数

この拡散係数 K は本論中の係数 a に相当するものと考えられるので、大白川支流の岩井谷を例にとって具体的数値を計算してみる。岩井谷は、流域面積 $A = 230 \text{ ha}$ 、流路巾 $B = 25 \text{ m}$ である。礫径は $d = 0.3 \text{ m}$ とし粗度係数は $n = 0.03$ とする。なお、平衡勾配は、次式で計算される。

$$i_c = (u_{*c}^2 / g)^{1/3} \cdot (n g)^{6/7} = 0.03 \cdot d^{1/3} \cdot (n g)^{6/7} \quad \text{----- (21)}$$

以上の数値を用いると、 $K = a = 1.66 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{year}$ となり、砂防学的単位の係数値が得られた。

さらに、岩井谷の現溪床の縦断形状は測量の結果 (22) 式のようになり、 $(b/a) = 0.0004$ であった。

$$h = 500 (e^{0.0004x} - 1) \quad \text{----- (22)}$$

以上の結果を用いて、この谷に高さ 10 m の砂防ダムを設置したと仮定した場合の堆砂形状の変動式を求めると、係数 b の正負により

$$h = 10 + 141.4 \{ (1 - e^{-0.00048x}) + 0.00008x \} \cdot (1 - e^{-0.28t}) \quad \text{(上昇変動) ----- (23)}$$

$$h = 10 + 141.4 \{ (e^{0.00048x} - 1) + 0.00008x \} \cdot e^{-0.28t} \quad \text{(下降変動) ----- (24)}$$

となり、その計算結果は図-2 のようになった。

(参考文献) 1) 平野昌繁: 地理評, 39.(5), 2) 駒村: 日林誌, 66.(4), 3) 平野: 地球科学, 22, 4) 芦田和男

防災研報, 12

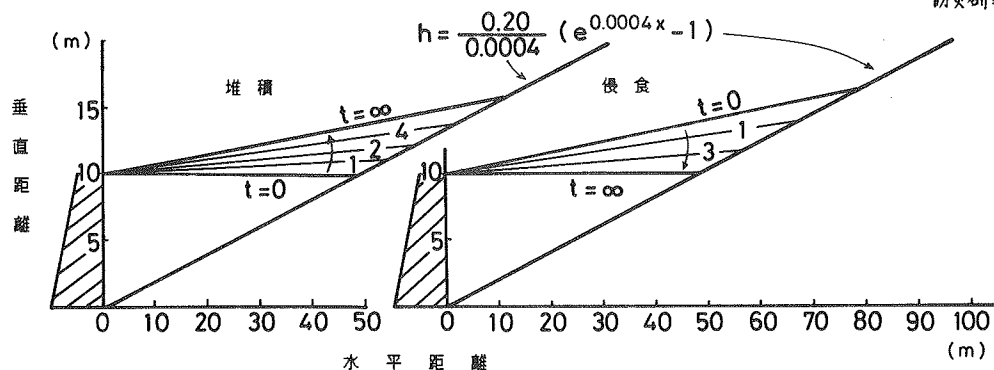


図-2 岩井谷の現溪床縦断形と砂防ダムの堆砂変動予測